(فهرست كتاب الجبر)

صحيفة

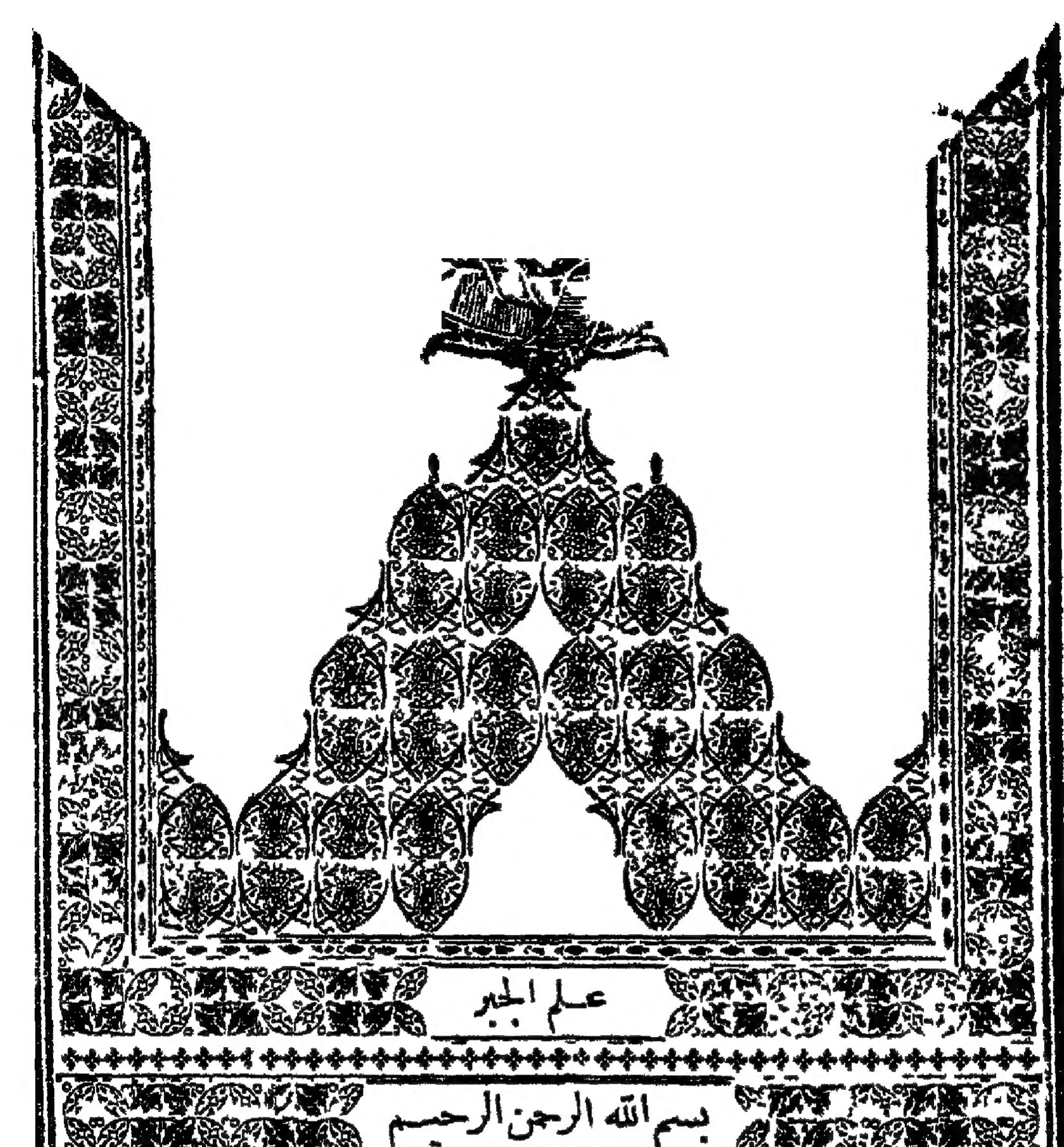
(فى المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية)

(الباب الرابع)

(فى المناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)

صحيفة

(الباب الخامس)



بسم الله الرحمن الرحيم

نعمك يا جابر قلوب المنكسرين * لا يقابلها شكر الشاكرين * اذ لا يجمعها حاصر بعد * ولا يعرف باقي طرحها احد * ضربتها على وجودك براهين * تدكدك بها اساس الملحدين * وقسمتها بحكمتك فلا عتاب * ان في ذلك لذكرى لاولى الالباب * فهي اجل ان يعرف قدرها * او يدرك بالاستخراج جذرها * فنحمدك اللهم على ما اوليت * ونشكر فضل جودك على ما اسديت * ونصلي ونسلم على سيد ولد عدنان * الذي نسخ دينه جميع الاديان * محمد المنتخب من اعلا رومه * المبعوث من خير جرثومه * وعلى الخلفاء الراشدين * وآله وصحبه اجمعين * خصوصا سيف السطوة المنتضى * ابي الحسن علي المرتضى * القائل من قلب اواه * لا يعرف الجذر الاصم الا الله * ما سجعت حمامة ورقاء * وحن مشتاق الى اللقاء .

وبعد

وبعد فلما تعلقت ارادة الاصفى الاعظم * والداورى الاكرم * بتربية العساكر المصريه * وعدم حرمانهم من الفنون العسكريه * وكان من جملة وسائلها * ومما لا غناء عنه لمسائلها * علم الجبر * العظيم القدر * صدر أمره الى من اجابه السعد بلبيك * ناظر المدارس الثلاث على بيك * بعمل منتخب لهم لطيف المبنى * جليل القدر فى المعنى * فأحال ذلك على الماهر اللبيب * واللوذعى الاريب * صاحب الفطنة الوفى الوعد * عامر افندى سعد * فانتخبه من مختصر الاعمال الجبريه * الذى ترجمه بالمهندسخانة الخديويه * من حاز من كل فن طرفا * محمد افندى مصطفى * وقد زاد عليه الاول قواعد مهمه * واضاف اليه مسائل نافعة جمه * ساعده فى ترجمتها من الفرنساويه طويل الباع * ابراهيم افندى البياع * فجاء محتويا على حل المعادلات بالدرجتين * وعلى المتناسبات والمتواليات وما يتعلق بهذين * فان لهما دخلا فى حل المسائل العظيمه * وفى حساب كوم القلل الجسيمه * المعتاد تشكيلها بالجبخانات الطوبجيه * وعلى مبحث اللوغاريتم العظيم الاهميه * وقد تمم بخاتمة لطيفه * محتوية على مسائل شريفه * مرتبة كترتيب قواعده الكليه * منتخبة للعساكر الحربيه *

(مقدمة)

زعم بعض الناس ان هذا العلم يسمى باسم اول من اشتغل به ولا اصل لهذا الزعم ففى الكتب الاسلامية ان الذى اخترعه ابوبكر الخوارزمى وسماه بعلم الجبر والمقابلة لكن لم يعرف الزمن الذى اخترع فيه وقد قيل ان بلاد اسبانيا لما كانت فى ايدى العرب مجاورة لبلاد افريقية اكتسبت هذا العلم منهم فى نحو سنة ١١٠٠ الف ومائة مسيحية وفى نحو سنة ١٥٠٠ الف وخمسمائة حضر بعض تجار ايطاليا من افريقية بنسخة من كتب هذا العلم الى بلاده فاشتغل به الايطاليون لكن لم يتحصلوا على ازيد من حل معادلة بدرجة رابعة وقد دخل هذا العلم بلاد النمسا واخذ فى التقدم وبلاد الانجليز ثم انتقل الى فرانسا فى سنة ١٥٥٨ الف وخمسمائة وثمانية وخمسين واسرع فى التقدم على يد

المؤلف فرانسوافييت الباريسي وهو اول شخص طبق الجبر على الهندسة وفى القرن السابع عشر تقدم هذا العلم تقدما واضحا من وقت الى آخر حيث ظهر فيه مشاهير المؤلفين كالمؤلف نوتون وديكارت الشهيرين وامثالهما وفى القرن الثامن عشر ظهر المؤلف لجرانج وكوت ولبلاس ونحوهما من فحول المؤلفين الذين تمموا فوائده ورتبوه ترتيبا منتظما

وبتقدم هذا العلم تقدمت العلوم الهندسية والطبيعية والميكانيكية والفلكية والفنون العسكرية بل وجميع الصنائع وبذلك كان هذا العلم من انفع العلوم لا ينكر فضله الا جاهل وذلك ان علم الهندسة قبل تقدم هذا العلم كان فى حيز الضعف حتى ان كثيرا من مسائله كان مستحيل الحل ومكث على تلك الاستحالة مدة طويلة وكان ايضا التوصل لبراهين القضايا الهندسية صعبا اذلا واسطة اذ ذاك تساعد العقول على مقاصدها فاضطر علماء هذا العلم للبحث عن اثبات قواعد نظرية عامة حرفية الوضع رقية المآخذ يتسبب عنها فك بعض المشكلات فاثبتوها وسموها بعلم الجبر وكان تصحيحه على يد أسير الاوزار * ابراهيم عبد الغفار * ولما تهيأ للتمام * ولبس وشاح الختام * وسمته بالكواكب الدريه * فى الاعمال الجبريه * وقد آن ان نشرع فى المقصود * فنقول بعون الملك المعبود

(مقدمة فى علم الجبر)

(١) الغرض الاصلى من علم الجبر حل المسائل العددية ومشكلات القضايا النظرية والعملية بوجه مختصر عام وانما يتوصل الى هذا العلم باستعمال الحروف والعلامات فالحروف تستعمل للدلالة على الاعداد ان كانت القضية حسابية وللدلالة على الخطوط أو السطوح والاجسام ان كانت القضية او المسئلة هندسية

(مقدمة فى بيان العلامات والاصطلاحات)

تستعمل العلامات للدلالة بطريق الاختصار على الارتباطات الواقعة بين الكميات الجارى عليها العمل

فالعلامات الاصلية المستعملة هى

(اولا) علامة + وتدل على جمع عددين حين توضع بينهما ويلفظ بها زائد مثال ذلك ح + ى يلفظ به ح زائد ى ويستدل بها على انه يلزم ضم العدد ى الى ح

(وثانيا) علامة — وتدل على ان العدد التالى لها مطروح من العدد السابق لها ويلفظ بها ناقص

مثال ذلك ح — ى يلفظ به ح ناقص ى ويستدل بها على انه يلزم طرح العدد ى من ح

(وثالثا) علامتا الضرب × و . وكلتاهما تدل على أن كذا مضروب فى كذا ولا تستعمل الثانية الا فى الحروف فقط ويمكن بيان حاصل ضرب العددين المبينين بحرفين بكتابة احدهما بجانب الآخر بدون فاصل فحاصل ضرب ٥ فى ٧ مثلا يمكن بيانه هكذا ٥ × ٧ وحاصل ضرب ح فى ى يمكن بيانه هكذا

ح × ى أو ح . ى أو ح ى

ويمكن بيان حاصل ضرب كميتين بجعل كلتيهما بين قوسين موضوعة احداهما بجانب الاخرى ولا يستعمل ذلك الا فى المضاريب المركبة من جزئين أو جملة

اجزاء متفاصلة عن بعضها بعلامة + أو — فحاصل ضرب ح — ء في ح + ء يمكن بيانه هكذا (ح — ء) (ح + ء) وحاصل ضرب ح — ء + هـ في و يبين هكذا (ح — ء + هـ) و

(ورابعاً) علامة القسمة هكذا : أو شرطة افقية هكذا — وتستعملان كما تراه فيما اذا طلب مثلا خارج قسمة ح على ء فانه يبين هكذا ح : ء أو $\frac{ح}{ء}$ وكل منهما معناه ح مقسوم على ء

(وخامسا) المكرر وهو العدد الذى يكتب عن يمين عدد آخر مبين بحرف او جملة حروف ويدل على عدد مرات تكرار العدد الآخر

مثال ذلك ٥ ح فانه يدل على أن حرف ح مكرر خمس مرات أى ح + ح + ح + ح + ح

(وسادسا) علامة التساوى هكذا = يلفظ بها مساو وتدل على التساوى بين كميتين قد وضعت بينهما مثال ذلك ح = ء فانه يدل على تساوى المقدار ح بالمقدار ء

(وسابعا) علامتا > و < فان كلتاهما تدل على عدم تساوى الكميتين المفصولتين بها لكن الاولى تدل على الاكبر والثانية على الاصغر مثال ذلك ح > ء وتلفظ هكذا ح اكبر من ء و ح < ء وتلفظ هكذا ح أصغر من ء

(وثامنا) للدلالة على عدم تساوى كميتين بدون تمييز صغراهما عن كبراهما تستعمل هذه العلامة ≠ مثال ذلك ح ≠ ء وتبين أن ح ليس مساويا ء

(٢) ويوجد علامتان ايضا احداهما تدل على قوة العدد والاخرى على جذره وقوة العدد هى حاصل ضرب مضروبين أو جملة مضاريب كل منهما مساو لهذا العدد ويقال ان العدد مرفوع الى القوة الثانية او الثالثة أو الرابعة وهكذا اذا كان حاصله مكونا من مضروبين أو ثلاثة مضاريب

أو أربعة وهكذا كل منها مساو لهذا العدد مثال ذلك ح × ح × ح × ح

فهذا يدل على القوة الثالثة للعدد ح وتبين قوة العدد بكتابتك عليه مائلا جهة الشمال بتمثيل عدد مرات دخوله مضروبا في هذه القوة ويسمى عدد المرات أسا فالقوة الرابعة للعدد ح تكتب هكذا ح^٤ ويلفظ ح أس أربعة فالأس يدل على درجة القوة لكن القوة الثانية لعدد تسمى مربعا والقوة الثالثة له تسمى مكعبا

وجذر العدد اصله الذى اذا رفع لدرجة ما تحصل منه العدد المذكور وهذا الجذر يسمى الجذر الثانى أو الثالث وهكذا اذا رفع الى القوة الثانية أو الثالثة وهكذا لانتاج العدد المعلوم فالجذر الثانى يسمى الجذر التربيعى والجذر الثالث يسمى الجذر التكعيبى

فالعدد ٥ هو الجذر الثانى او الجذر التربيعى للعدد ٢٥ و ح هو الجذر الرابع لمقدار ح^٤ ودرجة جذر العدد هى درجة القوة اللازمة لرفع هذا الجذر لينتج العدد المعلوم ويستدل على جذر العدد بوضع هذه العلامة $\sqrt{}$ عليه مكتوبا بين شعبتيها العدد المبين لدرجة الجذر فيستدل على الجذر التكعيبى للعدد ح بهذه العلامة $\sqrt[3]{\text{ح}}$ ويلفظ بها الجذر التكعيبى للعدد ح ومتى طلب جذر المربع فلا حاجة لوضع ٢ فوق العلامة فالجذر التربيعى للعدد ٧ يكتب هكذا $\sqrt{٧}$

(٣) ويظهر لك ثمرة استعمال الحروف والعلامات الجبرية فى حل ما اذا كان عندنا

مجموع عددين يساوى ٢٥ وفاضلهما يساوى ٩ والمطلوب معرفة كل من هذين العددين

فيمكن حل هذه المسئلة بالقواعد الحسابية غير أن استعمال العلامات الجبرية أخصر وأسهل وذلك بأن يرمز لاصغر العددين المجهولين بالحرف س وحيث كان فاضلهما مساويا للعدد ٩ يكون مقدار العدد الاكبر س + ٩ وحيث أن حاصل جمعهما يجب أن يكون مساويا للعدد ٢٥

يحدث هذا التساوى

س + س + ٩ = ٢٥ أو ٢ س + ٩ = ٢٥

وحيث أن ٢ س + ٩ يساوى ٢٥ يكون ٢ س مساويا ٢٥ — ٩.

أى ٢ س = ٢٥ — ٩ أى ٢ س = ١٦

ومن حيث أن ٢ س يساوى ١٦ يكون س = نصف ١٦

أو س = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

فاذن يكون العدد الاصغر مساويا ٨ والاكبر مساويا ٨ + ٩ أى ١٧ لأن ١٧ + ٨ = ٢٥ و ١٧ — ٨ = ٩

فقد ظهر من ذلك أن فى استعمال العلامات الجبرية اختصارا وبساطة لحل المسئلة غير أن هذا الحل غير عام ولجعله عاما كما هو الغرض من علم الجبر تستعمل الحروف وكيفية ذلك أن يقال ليكن ح رمزا لحاصل جمع عددين و ء رمزا لفاضلهما والمطلوب معرفة كل من العددين فيفرض أن س رمزا للعدد الاصغر يكون الاكبر س + ء فيحدث

س + س + ء = ح أو

٢ س + ء = ح أو

٢ س = ح — ء أو

س = $\frac{ح — ء}{٢}$

وحيث أن العدد الاصغر يساوى $\frac{ح — ء}{٢}$ يكون الاكبر الذى هو س + ء مساويا $\frac{ح — ء}{٢}$ + ء = $\frac{ح — ء}{٢}$ + $\frac{٢ء}{٢}$ = $\frac{ح — ء + ٢ء}{٢}$ = $\frac{ح + ء}{٢}$

فاذن يكون العدد الاصغر مساويا $\frac{ح — ء}{٢}$ والاكبر مساويا $\frac{ح + ء}{٢}$

وليتنبه الى أن هذين الناتجين لا يخصان مقدارين مرادين من ح و ء فحينئذ يكون الحاصل عاما وهذان الناتجان المسميان قانونين يمكن استعمالهما بدون واسطة فى حل المسائل المشابهة لهذه المسئلة لانه اذا فرض أن المطلوب ايجاد العددين اللذين حاصل جمعهما = ١٣٧ وفاضلهما = ٥٩.

يكفى ان يوضع فى هذين القانونين بدل ح العدد ١٣٧ وبدل ء العدد ٥٩ فيحدث $\frac{١٣٧+٥٩}{٢}$ اى ٩٨ وهو مقدار العدد الاكبر ثم $\frac{١٣٧-٥٩}{٢}$ أى ٣٩ وهو مقدار العدد الاصغر

ويمكن وضع المقدارين السابقين اللذين هما $\frac{ح+ء}{٢}$ و $\frac{ح-ء}{٢}$ بهذه الصورة $\frac{ح}{٢}+\frac{ء}{٢}$ و $\frac{ح}{٢}-\frac{ء}{٢}$ فتنتج قاعدة هى انه متى علم مجموع عددين وفاضلهما استنتج الاكبر منهما بضم نصف الفاضل الى نصف المجموع واستنتج الاصغر بطرح نصف الفاضل من نصف المجموع

(فى الكميات السلبية)

(٤) متى كانت الكمية المراد طرحها اكبر من الكمية التى يراد الطرح منها كانت عملية الطرح غير ممكنة لكن لبيان الناتج بكيفية مختصرة استنسبوا طرح الكمية الصغرى من الكبرى ووضع العلامة $-$ امام الناتج أى الباقى

فاذا اريد مثلا طرح العدد ٧ من العدد ٥ يطرح العدد ٥ من العدد ٧ فيكون الباقى ٢ فيوضع امامه علامة $-$ فيكون حينئذ $-$ ٢ وكذلك اذا اريد طرح ٩ $ح^{٣}ء^{٢}$ من ٤ $ح^{٣}ء^{٢}$ فالعملية غير ممكنة لانه لا يمكن طرح تسعة امثال $ح^{٣}ء^{٢}$ من اربعة امثال $ح^{٣}ء^{٢}$ فاذن يطرح أربعة أمثال $ح^{٣}ء^{٢}$ من تسعة امثال $ح^{٢}ء^{٢}$ فالباقى يكون ٥ $ح^{٣}ء^{٢}$ ويوضع العلامة $-$ امامه يكون الناتج $-$ ٥ $ح^{٣}ء^{٢}$ فكل من المقدارين $-$٢ و $-$٥ $ح^{٣}ء^{٢}$ يسمى بالكمية السالبة

وينتج من ذلك أن الكميات السالبة هى الكميات المسبوقة بالعلامة $-$ وأما الكميات الموجبة فهى الكميات الخالية منها او المسبوقة بالعلامة $+$ فعلى مقتضى ذلك تكون الكميات السالبة ناتجة من عملية طرح غير ممكنة

مثال ذلك

تاجر ربح فى السنة الاولى مبلغا قدره ح وخسر فى السنة الثانية مبلغا قدره ء فما يكون حال رأس ماله

فالجواب

فالجواب أن يقال اذا كان الربح ح اكبر من الخسارة ى فرأس المال يزيد بقدر ح ـ ى لكن اذا فاقت الخسارة الربح بأن كان ى > ح فقد نقص راس المال بقدر ى ـ ح فاذن كمية ى ـ ح الدالة على زيادة رأس المال لاتدل الا على عملية طرح مستحيل حيث كان ى > ح فيطرح الاصغر من الاكبر وتوضع العلامة ـ امام الباقي ليعلم أن الناتج ليس ربحا يضم الى رأس المال بل خسارة تطرح من رأس المال

فاذا فرض أن ح = ٧٠٠٠ و ى = ٤٠٠٠ فانه يوجد ربح قدره ٣٠٠٠

واذا فرض أن ح = ٤٠٠٠ و ى = ٧٠٠٠ فانه يوجد خسارة قدرها ٣٠٠٠ لكن يقال على وجه الطرد أن رأس المال ربح بقدر ـ ٣٠٠٠ ولو كان ذلك خلاف المعتاد

(٥) واذا اعتبرنا حينئذ في المقدار ح ـ ى ان المقدار ح ثابت والمقدار ى متزائد من ابتدا الصفر حدثت نواتج متناقصة فتى كان ى = ح يكون الفرق ح ـ ى مساويا لصفر واذا استمر المقدار ى في ازدياده حدثت كميات سلبية وكلما كانت ى كبيرة كانت هذه الكميات السلبية كبيرة أيضا باعتبار مقاديرها المطلقة فاذا فرض ح = ٣ وفرض على التوالي

ى = ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و الخ

كانت مقادير

ح ـ ى = ٣ و ٢ و ١ و ٠ و ـ ١ و ـ ٢ و ـ ٣ و ـ ٤ و ـ ٥ و ـ ٦ و الخ

وحيث أن المقادير السالبة معاقبة للمقادير الموجبة التي هى ٣ و ٢ و ١ و ٠ تعتبر اصغر من صفر ومن حيث ان الكميات السالبة الكبيرة المقدار المطلق تأتي بعد الكميات السالبة الصغيرة المقدار تعتبر اقل منها ولذا يشاهدان

ـ ٢ أصغر من صفر و ـ ٥ أصغر من ـ ٢ وباستعمال العلامتين

> و < يكون

$-٢ < ٠$ و $-٥ < -٢$. أو

$٠ > -٢$ و $-٢ > -٥$

وينتج من ذلك ان كل كمية سالبة اصغر من صفر وان اصغر الكميتين السالبتين ما كان مقدارها المطلق اكبر

(الباب الاول)

(فى العمليات الجبرية)

(فى تعاريف الحدود المتشابهة واختصارها)

(٦) كل كمية دخل فيها حرف أو جملة حروف تسمى كمية جبرية ومقدارا جبريا للكمية وكل كمية جبرية خلت اجزاؤها من العلامتين − و + تسمى حدا او كمية ذات حد وكل كمية مركبة من جزئين فأكثر تخللتها العلامة − أو + تسمى كمية ذات حدود ثم ان كانت الكمية محتوية على حدين سميت ذات الحدين وان كانت محتوية على ثلاثة سميت ذات الثلاثة حدود فاذا كمية $٤ ج^{٥} د - ٥ ج^{٤}$ من نوع ذات الحدين .

(٧) اذا وضع فى المقدار الجبرى أعداد بدل الحروف واجريت عليها العمليات المنوطة بها فالمقدار الناتج يسمى المقدار الرقمى

(مثال ذلك)

اذا فرض فى حد $٤ ج^{٣} د^{٢}$ أن $ج = ٢$ و $د = ١$ يكون مقداره الرقمى $٤ \times ٨ = ٣٢$ ومن البديهى أن المقدار الرقمى لكمية ذات حدود لا يتغير كائنا ما كان ترتيب كتابة حدودها لان الناتج لا يتغير بتغير اى ترتيب اجرى لاجل عمليات جمع او طرح

(٨) كل مضروب دخل فى حد يسمى اصلا لهذا الحد وعدد هذه المضاريب يسمى درجة الحد فالحد $٥ ج^{٣} د^{٢} هـ$ مثلا يحتوى على ستة اصول فهو من الدرجة السادسة فحينئذ درجة الحد تساوى حاصل جمع اسس الحروف المحتوى عليها ذلك الحد

ويقال لكمية ذات الحدود متجانسة اذا كانت درجة جميع حدودها

واحدة

واحدة فالكمية ذات الحدود ٣ حـ^٤ ءَ^٣ – ٤ حـ^٢ ء^٤ ء – ٧ حـ^٣ ء^٢ + ٢ حـ^٥ مثلا كمية رباعية متجانسة خماسية الدرجة

(٩) الحدود المركبة من احرف متحدة الصورة والاسس تسمى حدودا متشابهة ومتى كانت الكمية ذات الحدود محتوية على حدود متشابهة امكن اختصارها بتحويل هذه الحدود الى حد واحد فالكمية ذات الحدود ٥ حـ^٢ ء – ٨ حـ^٢ ء + ٧ حـ^٢ ء – ٢ حـ^٢ ء يمكن وضعها بهذه الصورة ٥ حـ^٢ ء + ٧ حـ^٢ ء – ٨ حـ^٢ ء – ٢ حـ^٢ ء

فحدا ٥ حـ^٢ ء و ٧ حـ^٢ ء يدلان على خمسة امثال حـ^٢ ء زائدا سبعة امثال حـ^٢ ء أعنى ١٢ حـ^٢ ء فاذن يمكن استعواضهما بكمية ١٢ حـ^٢ ء وحدا – ٨ حـ^٢ ء و – ٢ حـ^٢ ء يؤلان الى كمية – ١٠ حـ^٢ ء كما آل الحدان الموجبان الى كمية ١٢ حـ^٢ ء فحينئذ تؤول الكمية ذات الحدود الى ١٢ حـ^٢ ء – ١٠ حـ^٢ ء وبها يستدل على انه يلزم طرح ١٠ حـ^٢ ء من ١٢ حـ^٢ ء فيكون الباقى ٢ حـ^٢ ء وهو الذى الت اليه الكمية ذات الحدود ومثل ذلك يجرى فى

٧ حـ^٢ ء – ٩ حـ^٢ ء – ٥ حـ^٢ ء – ٣ حـ^٢ ء + ٦ حـ^٢ ء = ١٣ حـ^٢ ء – ١٧ حـ^٢ ء = – ٤ حـ^٢ ء

فالقاعدة العمومية لتحويل جملة حدود متشابهة الى حد واحد ان تجمع المكررات الموجبة والمكررات السالبة ثم يطرح المكرر الاصغر من الاكبر وتوضع علامة الاكبر امام الناتج ثم توضع الحروف المشتركة بأسسها الاصلية بجانب الناتج المذكور

(فى الجمع)

(١٠) لجمع الكميتين ٣ حـ – ٢ ء و ٤ هـ – ٥ و يجرى العمل هكذا

٣ جـ — ٢ د
٤ هـ — ٥ و
―――――――――――
٣ جـ — ٢ د + ٤ هـ — ٥ و

فيضم اولا ٤ هـ الى ٣ جـ — ٢ د بان يوضع ٤ هـ بعد ٣ جـ — ٢ د بالعلامة + فيحصل ٣ جـ — ٢ د + ٤ هـ وحيث ان هذا الناتج اكبر من المطلوب بالمقدار ٥ و يطرح ٥ و من ٣ جـ — ٢ د + ٤ هـ اى يكتب ٥ و بعده بالعلامة — فاذن يكون حاصل الجمع المطلوب

٣ جـ — ٢ د + ٤ هـ — ٥ و

واذا كان حاصل الجمع محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها فالقاعدة العمومية لجمع جملة كميات ان تكتب متتالية كما هى موجودة ثم تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

(تنبيه)

توضع الحدود المتشابهة للكميات ذات الحدود تحت بعضها فى العمل ثم يكتب من اول الامر الحاصل بالاختصار وصورة العمل هكذا

٨ ج^٣ د^٢ — ٥ ج^٢ د^٣ — ٣ ج د^٤ + ٧ ج^٥
٦ ج^٣ د^٢ — ٣ ج^٢ د^٣ + ٤ ج د^٤
— ٥ ج^٣ د^٢ + ٤ ج^٢ د^٣ — ٧ ج د^٤
٢ ج^٣ د^٢ + ٥ ج^٢ د^٣ + ٨ ج د^٤ — ٧ ج^٥
―――――――――――
١١ ج^٣ د^٢ + ٢ ج^٢ د^٣ + ٢ ج د^٤

(فى الطرح)

(١١) لطرح الكمية ذات الحدود ٦ ج^٢ د^٢ — ٤ ج^٣ د^٢ من الكمية ذات الحدود ٥ ج^٣ د — ٢ ج د^٣ يجرى العمل هكذا

٥ ج^٣ د — ٢ ج د^٣
٦ ج د^٢ — ٤ ج^٣ د^٢
―――――――――――
٥ ج^٣ د — ٢ ج د^٣ — ٦ ج^٢ د^٢ + ٤ ج^٣ د^٢

فيطرح

فيطرح من الكمية ذات الحدود ٥ ح^{٣}ى − ٢ حى^{٣} اولا الكمية ٦ ح^{٢}ى^{٢} بكتابتها بعدها بالعلامة − فيتحصل ٥ ح^{٣}ى − ٢ حى^{٣} − ٦ ح^{٢}ى^{٢} لكن حيث ان ٦ ح^{٢}ى اكبر من المطروح بمقدار ٤ ح^{٣}ى^{٢} فالناتج وهو ٥ ح^{٣}ى − ٢ حى^{٣} − ٦ ح^{٢}ى^{٢} يكون اصغر من الناتج الحقيق بقدر ٤ ح^{٣}ى^{٢} فيضم له هذا المقدار بالعلامة + فيكون الناتج حينئذ هكذا

٥ ح^{٣}ى − ٢ حى^{٣} − ٦ ح^{٢}ى^{٢} + ٤ ح^{٣}ى^{٢}

واذا كان الناتج الذى هو باقى الطرح محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها

فالقاعدة العمومية لطرح كمية من اخرى أن تكتب الكمية التى يراد طرحها بجانب الاخرى مع تغيير جميع علامات حدودها واختصار الحدود المتشابهة ان وجدت

(تنبيهان)

الاول اذا اريد بيان باقى الطرح من غير اجراء العمل فى المثال السابق وضع بهذه الصورة

٥ ح^{٣}ى − ٢ حى^{٣} − (٦ ح^{٢}ى^{٢} − ٤ ح^{٣}ى^{٢})

اعنى للدلالة على طرح كمية ذات حدود من مثلها تحصر الكمية التى يراد طرحها بين قوسين بهذه الصورة ( ) وتكتب جانب المطروح منه جهة اليسار مفصولة بالعلامة − واذا اريد اجراء عملية الطرح يحذف القوسان ونغير علامة الحدود المحصورة بينهما

الثانى متى وجدت حدود متشابهة وضعت فى العمل تحت بعضها تم تغير علامات المطروح وتختصر الحدود المتشابهة وهاك كيفية العمل

٤ ح^{٣}ى^{٣} − ٧ ح^{٢}ى^{٤} − ٦ حى^{٥} + ٣ ى^{٦}

٢ ح^{٣}ى^{٣} + ٤ ح^{٢}ى^{٤} − ٥ حى^{٥} − ٥ ى^{٦}

---

٢ ح^{٣}ى^{٣} − ١١ ح^{٢}ى^{٤} − حى^{٥} + ٨ ى^{٦}

(١٢) قد اجرينا اثبات قواعد الجمع والطرح على مجموع كميات متنوعة متفاصلة بعلامتي + و — فان قلت هل يجب ان تكون هذه القواعد مطبقة على الحدود المنفردة فالجواب أن يقال أن تطبيق هذه القواعد على الكميات السالبة لا معنى له على أن القاعدة التي يراد سلوكها في التطبيق يحتاج اثباتها الى واسطة وهي غير معلومة لنا فحينئذ لا معنى لجمع العددين + ٧ ح و — ٩ د ولا لطرح العددين — ٣ ح و — ٨ د لكن حيث أن علم الجبر يوصل في الغالب لعمليات من هذا القبيل اتفقوا على أن القواعد المثبتة للكميات ذات الحدود تكون جارية على الحدود المنفردة وهي قواعد لا تتوقف الا على حفظ العلامات أو تغيرها ومع ذلك فالتجربة هي التي احوجتهم الى هذا الاتفاق

فحاصل جمع الاعداد — ٥ و — ٧ و — ٣ مثلا هو — ١٥ وباقي طرح — ٧ من — ٥ هو + ٢ لانه بتغيير علامة المطروح — ٧ يصير + ٧ ثم يربط هذا الناتج بالمطروح منه — ٥ فيحدث — ٥ + ٧ أي + ٢

ومثل هذا يقال في ضرب حدين منفردين ولا حاجة لذكره في القسمة لأن قواعد عمليات القسمة ناتجة من قواعد عمليات الضرب

(في الضرب)

(١٣) اذا فرض اولا أن المطلوب ضرب حد في آخر كأن يراد مثلا ضرب ٤ ح^٢ د^٣ في ٣ ح^٣ د هـ^٢ فحاصل الضرب يمكن وضعه بهذه الصورة ٤ ح^٢ د^٣ × ٣ ح^٣ د هـ^٢ أو ٤ × ح^٢ × د^٣ × ٣ × ح^٣ × د × هـ^٢ واذا غير ترتيب المضاريب حدث ٤ × ٣ × ح^٢ × ح^٣ × د^٣ × د × هـ × هـ وبتحليل ح^٢ و ح^٣ و د^٣ الخ الى مضاريبها يحدث ٤ × ٣ × ح × ح × ح × ح × ح × د × د × د × د × هـ × هـ ومن حيث أن ٣ × ٤ = ١٢ و ح × ح × ح × ح × ح = ح^٥ و د × د × د × د = د^٤ و هـ × هـ = هـ^٢ يحدث

١٢ × ح٣ × د٤ × هـ٢ [illegible] وهذا هو حاصل الضرب المطلوب

فالقاعدة العمومية لضرب حد فى اخر أن يضرب ابتداء مكرر الحد الاول فى مكرر الحد الثانى ثم تكتب على شمال حاصل الضرب المذكور الحروف التى لم تكن مشتركة فى كل من المضروبين كما هى ثم يكتب الحرف المشترك باس مساو لحاصل جمع اسيه فى المضروبين

(تنبيه)

الحالات الثلاث المحصورة فى هذه القاعدة العمومية تسمى قاعدة المكررات وقاعدة الحروف وقاعدة الاسس

(١٤) لضرب كمية ذات حدود فى مثلها نحو ح — د فى هـ — و يجرى العمل هكذا

ح — د مضروب

هـ — و مضروب فيه

هـ ح — هـ د — و ح + و د حاصل الضرب

فيضرب اولا ح — د فى هـ فحاصل ضرب ح فى هـ يكون مبينا بالحد ح هـ غير أنه بضرب ح فى هـ ازداد المضروب بقدر د فاذا يكون حاصل الضرب ازيد بمقدار د مضروبا فى هـ أى بمقدار د هـ فيلزم أن يطرح هـ د من ح هـ فيحدث ح هـ — هـ د وأخذ هـ مضروبا فيه يزداد بمقدار و فحاصل الضرب ح هـ — هـ د يكون ازيد بحاصل ضرب ح — د فى و المساوى ح و — د و كما تقدم فى ايجاد حاصل ضرب ح — د فى هـ فاذا طرح حاصل الضرب ح و — د و كما تقدم فى (بند ١١) من ح هـ — هـ د فالناتج ح هـ — هـ د — ح و + د و هو حاصل الضرب المطلوب وينتج من ذلك انه لضرب كمية ذات حدود فى مثلها يجب أن يضرب كل حد من المضروب فى كل حد من المضروب فيه ويقرن كل حاصل جزئى بالعلامة + اذا اتحدت علامتا مضروبيه وبالعلامه — اذا اختلفت

علامتاهما مثال ذلك أن يراد ضرب

٥ح^{٢}ى^{٣} — ٤ح^{٣}ى^{٢} + ٣ح^{٥} — ٣ح^{٤}ى + ٧ح ى^{٤} — ٨ى^{٥} فى ٥ح ى^{٢} — ٧ح^{٢}ى — ٤ى^{٣}

وليتنبه إلى انه متى اجريت عملية الضرب كما تقدم تختصر الحدود المتشابهة من الحاصل ان وجدت ولتسهيل هذه العملية يرتب المضروبان بالنسبة للدرجة التصاعدية أو التنازلية لحرف واحد فيهما

ويقال ان الكمية مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف متى كانت اسس هذا الحرف آخذة فى التصاعد أو التنازل من ابتدا الحد الاول الى الحد الاخير فاذا اجرينا هذا الترتيب على المضروبين المتقدمين بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح يحدث

٣ح^{٥} — ٣ح^{٤}ى — ٤ح^{٣}ى^{٢} + ٥ح^{٢}ى^{٣} + ٧ح ى^{٤} — ٨ى^{٥}

— ٧ح^{٢}ى + ٥ح ى^{٢} — ٤ى^{٣}

— ٢١ح^{٧}ى + ٢١ح^{٦}ى^{٢} + ٢٨ح^{٥}ى^{٣} — ٣٥ح^{٤}ى^{٤} — ٤٩ح^{٣}ى^{٥} + ٥٦ح^{٢}ى^{٦}

+ ١٥ح^{٦}ى^{٢} — ١٥ح^{٥}ى^{٣} — ٢٠ح^{٤}ى^{٤} + ٢٥ح^{٣}ى^{٥} + ٣٥ح^{٢}ى^{٦} — ٤٠ح ى^{٧}

— ١٢ح^{٥}ى^{٣} + ١٢ح^{٤}ى^{٤} + ١٦ح^{٣}ى^{٥} — ٢٠ح^{٢}ى^{٦} — ٢٨ح ى^{٧} + ٣٢ى^{٨}

— ٢١ح^{٧}ى + ٣٦ح^{٦}ى^{٢} + ح^{٥}ى^{٣} — ٤٣ح^{٤}ى^{٤} — ٨ح^{٣}ى^{٥} + ٧١ح^{٢}ى^{٦} — ٦٨ح ى^{٧} + ٣٢ى^{٨}

فيهتم غاية الاهتمام بوضع الحدود المتشابهة تحت بعضها فى اجراء عمل المضاريب الجزئية وبعد اجراء الاختصار يحدث عين ما مر

— ٢١ح^{٧}ى + ٣٦ح^{٦}ى^{٢} + ح^{٥}ى^{٣} — ٤٣ح^{٤}ى^{٤} — ٨ح^{٣}ى^{٥} + ٧١ح^{٢}ى^{٦} — ٦٨ح ى^{٧} + ٣٢ى^{٨}

فالقاعدة العمومية لتحصيل حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود فى بعضهما ان ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف واحد فيهما ويضرب كل حد من المضروب فى كل حد من المضروب فيه ثم يقرن حاصلهما بالعلامة + اذا اتحدت علامتاهما أو بالعلامة — اذا

اختلفت

اختلفت علامتاهما ثم تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

(تنبيه)

متى رتب مضروبا حاصل ضرب بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف واحد فحاصل ضرب الحد الاول من المضروب فى الحد الاول من المضروب فيه يحتوى على حرف الترتيب بأس اكبر من كل من اسسه فى الحواصل الاخر الجزئية لانهما الحدان المشتملان على حرف الترتيب بأس اكبر من أس كل من الحدود المشتملة على الحرف المذكور وحيث وجد حاصل جزئى لا يمكن اختصاره مع آخر يكون هو الحد الاول لحاصل الضرب المطلوب المرتب بترتيب مضاربيه

ومثل ذلك يقال فى حاصل ضرب الحد الاخير من المضروب فى الحد الاخير من المضروب فيه فيكون هو الحد الاخير لحاصل الضرب المطلوب

ومثل ذلك يقال ايضا فى ترتيب الكميتين ذاتى الحدود بالنسبة للدرجات التصاعدية لحرف فيكون أس الحد الاول لحاصل الضرب الاصلى اصغر من أس كل من الحدود الاخر وأس الحد الاخير اكبرها

فعلى ذلك اذا كان حاصل الضرب مرتبا ترتيب مضروبيه فالحد الاول منه يكون فى الحقيقة حاصل ضرب الحد الاول من المضروب فى الحد الاول من المضروب فيه والحد الاخير منه يكون فى الحقيقة حاصل الضرب للحد الاخير من المضروب فى الحد الاخير من المضروب فيه

(١٥) اقل عدد الحدود التى يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود فى بعضهما اثنان لانه قد ثبت ان حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود يكون مشتملا اقل ما هنالك على حدين لا يمكن اختصارهما واكثر عدد الحدود التى يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود فى بعضهما يكون مساويا لحاصل ضرب عدد حدود المضروب فى عدد حدود المضروب فيه اذا لم يحتو هذا الحاصل على حدود يمكن اختصارها

(١٦) حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود متجانسة كمية ذات حدود متجانسة

درجتها مساوية لحاصل جمع درجتى مضروبيها الان درجة كل حاصل ضرب جزئى تساوى حاصل جمع درجتى مضروبيه كما هى قاعدة ضرب حدين فى بعضهما واذا احتوت الكمية ذات الحدود على حرف اسمه متحد فى بعض حدودها او فى جميعها اعتبرت هذه الحدود حدا واحدا بان تحصر هذه الحدود بين قوسين ما عدا الحرف المذكور وتجعل مكررا للحرف المذكور مثال ذلك

$2\,\text{ح}^{3}\text{د}^{2} - 3\,\text{هـ}^{2}\text{ح}^{3} - 3\,\text{هـ}\,\text{د}\,\text{ح}^{2}$ فترقم هكذا

$$(2\,\text{د}^{2} - 3\,\text{د}\,\text{هـ} - 3\,\text{هـ}^{2})\,\text{ح}^{3}$$

فالكمية $2\,\text{د}^{2} - 3\,\text{د}\,\text{هـ} - 3\,\text{هـ}^{2}$ تعتبر مكرر الحرف ح^{3} وهى مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف د ولك ان ترتبها بحسب الدرجات التنازلية للحرف هـ هكذا

$$(-3\,\text{هـ}^{2} - 3\,\text{د}\,\text{هـ} + 2\,\text{د}^{2})\,\text{ح}^{3}$$

ويمكن وضع الكمية $(-3\,\text{هـ}^{2} - 3\,\text{د}\,\text{هـ} + 2\,\text{د}^{2})\,\text{ح}^{3}$ مرتبة بهذه الصورة او بهذه الصورة

$$\left.\begin{array}{l} +2\,\text{د}^{2} \\ -3\,\text{د}\,\text{هـ} \\ -3\,\text{هـ}^{2} \end{array}\right|\text{ح}^{3} \qquad \left.\begin{array}{l} -3\,\text{هـ}^{2} \\ -3\,\text{د}\,\text{هـ} \\ +2\,\text{د}^{2} \end{array}\right|\text{ح}^{3}$$

وسياتى استعمال ذلك فى القسمة وحل المعادلات الحرفية واجراء عملية الضرب يكون على كيفيتى الوضعين المتقدمين وهاك مثالا لتوضيح ذلك

(الكيفية الاولى)

$$(2\,\text{د} - \text{هـ})\,\text{ح}^{2} - (4\,\text{د}^{2} - 2\,\text{د}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{2})\,\text{ح} \quad \text{مضروب}$$

$$(2\,\text{د} + \text{هـ})\,\text{ح} + \text{و} \quad \text{مضروب فيه}$$

$$(4\,\text{د}^{2} - \text{هـ}^{2})\,\text{ح}^{3} - (8\,\text{د}^{3} + \text{هـ}^{3})\,\text{ح}^{2}$$

$$+(2\,\text{د} - \text{هـ})\,\text{ح}^{2}\text{و} - (4\,\text{د}^{2} - 2\,\text{د}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{2})\,\text{ح}\,\text{و}$$

$$(4\,\text{د}^{2} - \text{هـ}^{2})\,\text{ح}^{3} - (8\,\text{د}^{3} + \text{هـ}^{3} - 2\,\text{د}\,\text{و} + \text{هـ}\,\text{و})\,\text{ح}^{2} - (4\,\text{د}^{2}\text{و} - 2\,\text{د}\,\text{هـ}\,\text{و} + \text{هـ}^{2}\text{و})\,\text{ح} \quad \text{حاصل الضرب}$$

فاذا

فاذا تعمر ضرب جزء فى آخر ضرباتلى تتميمة كالمعتاد ثم يوضع حاصل الضرب الجزئى فى مرتبته

(الكيفية الثانية)

+ ٢ ك^٢ − ه	ح^٢ − ٤ ك^٢ + ٢ ك ه − ه^٢	ح	مضروب
+ ٢ ك + ه	ح + و		مضروب فيه
+ ٤ ك^٢ − ٢ ك ه + ٢ ك ه − ه^٢	ح^٣ − ٨ ك^٣ + ٤ ك^٢ ه − ٢ ك ه^٢ − ٤ ك^٢ ه + ٢ ك ه^٢ − ه^٣ + ٢ و ك − و ه	ح^٢ − ٤ و ك^٢ + ٢ ك ه و − و ه^٢	ح
+ ٤ ك^٢ − ه^٢	ح^٣ − ٨ ك^٣ − ه^٣ + ٢ و ك − و ه	ح^٢ − ٤ و ك^٢ + ٢ ك ه و − و ه^٢	ح حاصل الضرب

(قواعد)

(١٧) الاولى اذا اجريت عملية ضرب (ح + ك) فى (ح + ك) أى مربع ح + ك يحدث

$$(ح + ك)^٢ = ح^٢ + ٢ ح ك + ك^٢$$

وينتج من ذلك أن مربع كمية ذات حدين يحتوى على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الحد الثانى

الثانية اذا ضرب $\text{ح}^2 + 2\text{ح}\text{ء} + \text{ء}^2$ فى $\text{ح} + \text{ء}$ يحدث مكعب $\text{ح} + \text{ء}$

أى $(\text{ح} + \text{ء})^3 = \text{ح}^3 + 3\text{ح}^2\text{ء} + 3\text{ح}\text{ء}^2 + \text{ء}^3$

وينتج من ذلك ان مكعب كمية ذات حدين يحتوى على مكعب الحد الاول زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال تربيع الاول فى الثانى زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال الاول فى تربيع الثانى زائدا مكعب الثانى

الثالثة اذا ضرب $(\text{ح} + \text{ء})$ فى $(\text{ح} - \text{ء})$ ينتج

$$(\text{ح} + \text{ء})(\text{ح} - \text{ء}) = \text{ح}^2 - \text{ء}^2$$

وينتج من ذلك ان حاصل ضرب مجموع كميتين فى فاضلهما يساوى الفرق بين مربعيهما فيكون الفرق بين مربعى كميتين مساويا لحاصل ضرب جمع جذريهما فى فاضل الجذرين مثال ذلك

$$25\text{ح}^4\text{ء}^2 - 9\text{ح}^2\text{ء}^4 = (5\text{ح}^2\text{ء} + 3\text{ح}\text{ء}^2)(5\text{ح}^2\text{ء} - 3\text{ح}\text{ء}^2)$$ وكذا

$$\text{ح} - \text{ء} = (\sqrt{\text{ح}} + \sqrt{\text{ء}})(\sqrt{\text{ح}} - \sqrt{\text{ء}})$$

(فى القسمة)

(١٨) اذا كان المطلوب قسمة حد على اخر يقال

اولا مكرر خارج القسمة يستنتج من تقسيم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه لان المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة وحيث أن مكرر حاصل ضرب يساوى حاصل ضرب مكررى مضروبيه كما فى (بند ١٣) يكون مكرر المقسوم مساويا لحاصل ضرب مكرر المقسوم عليه فى مكرر خارج القسمة فحينئذ يكون مكرر خارج القسمة مساويا لمكرر المقسوم مقسوما على مكرر المقسوم عليه كما فى قاعدة الاسس

وثانيا اذا كان المقسوم محتويا على حرف ليس فى المقسوم عليه يكتب فى خارج القسمة عين ما فى المقسوم لان المقسوم هو حاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة فكل حرف ليس فى المقسوم عليه وهو داخل فى المقسوم

يكتب فى خارج القسمة (انظر بند ٣ ،٤ فى قاعدة الحروف)

وثالثا اذا اتحد حرف فى المقسوم والمقسوم عليه يكتب ذلك الحرف فى خارج القسمة باس مساو لاسه فى المقسوم ناقصا أسه فى المقسوم عليه لان المقسوم يساوى حاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة فحينئذ يكون اس الحرف من المقسوم مساويا لحاصل جمع اسيه فى المقسوم عليه وخارج القسمة كما فى (بند ١٣) فاذن يكون أس الحرف من خارج القسمة مساويا لاسه فى المقسوم ناقصا اسه فى المقسوم عليه (انظر قاعدة الاسس)

ورابعا اذا اتحدت علامتا المقسوم والمقسوم عليه كانت علامة خارج القسمة + واذا اختلفت فيهما كانت علامته − لانه اذا فرض أن علامة المقسوم عليه زائد وعلامة المقسوم الذى هو عبارة عن حاصل ضرب ناقص يكون علامتا مضروبيه متخالفة كما فى (بند ١٤) وحيث أن علامة المقسوم عليه الذى هو عبارة عن احد المضروبين زائد تكون علامة خارج القسمة الذى هو عبارة عن المضروب الآخر ناقصا (انظر قاعدة العلامات)

فالقاعدة العمومية لتقسيم حد على آخر أن يقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه وتكتب الحروف الذى يحتوى عليها المقسوم دون المقسوم عليه عقب الناتج الاول باسها الكائنة به فى المقسوم ثم تكتب الحروف المشتركة الكائنة فى المقسوم والمقسوم عليه بأس مساو لفاضل اسسها الكائنة بها فى المقسوم والمقسوم عليه ويوضع فى خارج القسمة علامة + اذا اتحدت علامتا الحدين وعلامة − اذا اختلفت علامتاهما وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم $\text{٢٤ س}^{٥}\text{ح}^{٣}\text{د}^{٢}$ على $\text{٦ س}^{٢}\text{ح}$ هكذا

$$\frac{\text{٢٤ س}^{٥}\text{ح}^{٣}\text{د}^{٢}}{\text{٦ س}^{٢}\text{ح}} = \text{٤ س}^{٣}\text{ح}^{٢}\text{د}^{٢}$$

(تنبيه)

تقسيم حد على آخر غير ممكن اذا كان مكرر المقسوم غير قابل للقسمة على مكرر المقسوم عليه او كان حرف من المقسوم عليه غير موجود فى المقسوم أو كان

اس حرف من المقسوم عليه اكبر من اسه فى المقسوم فاذا وجدت حالة من
هذه الاحوال الثلاث جعل خارج القسمة ككسر اعتيادى يختصر فقط
ان قبل الاختصار بان تحذف منه المضاريب المشتركة فى كل من حديه
فحينئذ خارج قسمة ٢٤ ح^{5} ء^{4} هـ على ١٨ ح^{2} ء^{6} و^{2} يوضع بهذه الصورة
$\frac{\text{٢٤ ح}^{5}\text{ ء}^{4}\text{ هـ}}{\text{١٨ ح}^{2}\text{ ء}^{6}\text{ و}^{2}} = \frac{\text{٤ ح}^{3}\text{ هـ}}{\text{٣ ء}^{2}\text{ و}^{2}}$ بحذف المضروب المشترك ٦ ح^{2} ء^{4} من
كل من الحدين

(١٩) اذا قسم ح^{م} على ح^{م} جريا على قاعدة الاسس يحدث $\frac{\text{ح}^{م}}{\text{ح}^{م}}$ = ح^{0}
ومن البديهى أن $\frac{\text{ح}^{م}}{\text{ح}^{م}}$ = ١ فاذن يكون ح^{0} = ١ وينتج من ذلك أن كل
حرف اسه صفر يساوى واحدا

(٢٠) ولنشتغل الآن بتقسيم كمية ذات حدود على مثلها فنفرض أن
المقسوم ا + ب + ح + ء الخ والمقسوم عليه ا$'$ + ب$'$ + ح$'$
+ ء$'$ + الخ وخارج القسمة المجهول ا$''$ + ب$''$ + ح$''$ + ء$''$ الخ
وازموز ا و ب و ح و ا$'$ و ب$'$ و ح$'$ و ا$''$ و ب$''$ و ح$''$ دالة على
حدود ايا ما كانت وأن المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة مرتبة بحسب
الدرجات التنازلية للحرف س فاذن يكون وضع العمل هكذا

ا + ب + ح + ء + ... الخ	ا$'$ + ب$'$ + ح$'$ + ... الخ
م + ن + ع + ... الخ	ا$''$ + ب$''$ + ح$''$ + ... الخ
ر + ص + ... الخ	

ثم يقال من المعلوم ان المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا فى خارج
القسمة وتقدم فى (تنبيه بند ١٤) انه اذا كان حاصل الضرب ومضروباه
مرتبة بحسب حرف واحد كان الحد الاول لحاصل الضرب هو حاصل ضرب
اول حد من المضروب فى اول حد من المضروب فيه فيكون ا مساويا
لحاصل ضرب ا$''$ × ا$'$ واذا يستنتج ا$''$ بتقسيم ا على ا$'$ وحيث
علم الحد ا$''$ يضرب المقسوم عليه فى هذا الحد ويطرح حاصل الضرب من
المقسوم فينتج باق بهذه الصورة م + ن + ع + ... الخ

لايحتوى الا على حاصل ضرب المقسوم عليه فى جزء خارج القسمة ب + ح + الخ وحيث أن حاصل الضرب م + ن + ع ومضاربيه أ + ب + ح + الخ و ب + ح + الخ مرتبة بكيفية واحدة يكون م مساويا الحاصل ضرب أ فى ب (كما فى تنبيه ١٤) فاذن يستنتج ب بتقسيم م على أ ثم يضرب ب فى المقسوم عليه ويطرح الحاصل من الباقى م + ن + ع فينتج باق جديد بهذه الصورة ر + ص ... الخ وبمثل ما تقدم يتوصل الى تقسيم ر على أ لحدوث ح وهلم جرا

فالقاعدة العمومية لتقسيم ذات الحدود على مثلها ان يرتب المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة للدرجة التصاعدية او التنازلية لحرف واحد ثم يقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الاول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه فى الحد الاول من خارج القسمة ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم الحد الاول من الباقى على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الثانى من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه فى الحد الثانى من خارج القسمة ويطرح الحاصل من الباقى الاول فيحدث باق ثان يقسم على الحد الاول من المقسوم عليه لحدوث الحد الثالث من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال حتى يصير الباقى صفرا أو غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه

وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم ذات الحدود ١٨ح^٤ى — ٤٨حى^٤ — ١٠ح^٣ى^٢ + ٣٥ح^٥ + ٤٤ح^٢ى^٣ على ٤حى — ٦ى^٢ + ٥ح^٢ هكذا

	٣٥ح^٥ + ١٨ح^٤ى — ١٠ح^٣ى^٢ + ٤٤ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤	٥ح^٢ + ٤حى — ٦ى^٢
	— ٣٥ح^٥ — ٢٨ح^٤ى + ٤٢ح^٣ى^٢	٧ح^٣ — ٢ح^٢ى + ٨حى^٢
الباقى الاول	— ١٠ح^٤ى + ٣٢ح^٣ى^٢ + ٤٤ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤	
	+ ١٠ح^٤ى + ٨ح^٣ى^٢ — ١٢ح^٢ى^٣	
الباقى الثانى	+ ٤٠ح^٣ى^٢ + ٣٢ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤	
	— ٤٠ح^٣ى^٢ — ٣٢ح^٢ى^٣ + ٤٨حى^٤	
الباقى الثالث	٠٠ ٠٠ ٠٠	

فبعد ترتيب ذاتى الحدود بالنسبة للدرجة التنازلية للحرف ح يقسم ٣٥ح^٥ على ٥ح^٢ فيحدث ٧ح^٣ وهو الحد الاول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه فى ٧ح^٣ ويطرح الحاصل من المقسوم بتغيير علامات كل من الحواصل الجزئية ووضع الحاصل المذكور تحت الحدود المشابهة لحدوده من المقسوم واختصار الحدود المتشابهة فيحدث باق هو — ١٠ح^٤ى + ٣٢ح^٣ى^٢ + ٤٤ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤ ثم يقسم الحد الاول — ١٠ح^٤ى من هذا الباقى على ٥ح^٢ فيحدث — ٢ح^٢ى وهو الحد الثانى من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال

هذا واختصار العمل يكون بضرب كل حد من خارج القسمة فى المقسوم عليه وطرحه مع اختصار الحدود المتشابهة الموجودة فيه وصورة العمل هكذا

	٣٥ح^٥ + ١٨ح^٤ى — ١٠ح^٣ى^٢ + ٤٤ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤	٥ح^٢ + ٤حى — ٦ى^٢
الباقى الاول	— ١٠ح^٤ى + ٣٢ح^٣ى^٢ + ٤٤ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤	٧ح^٣ — ٢ح^٢ى + ٨حى^٢
الباقى الثانى	+ ٤٠ح^٣ى^٢ + ٣٢ح^٢ى^٣ — ٤٨حى^٤	

فبعد استنتاج ٧ح^{٣} اعنى الحد الاول من خارج القسمة بضرب ٧ح^{٣} فى ٥ح^{٢}
فيحدث ٣٥ح^{٥} ولطرحه يجعل − ٣٥ح^{٥} وحاصل ضرب + ٤حد فى ٧ح^{٣}
يحدث عنه ٢٨ح^{٤}د ولطرحه يجعل − ٢٨ح^{٤}د وهو حد ينبغى اختصاره
مع + ١٨ح^{٤}د فيصير − ١٠ح^{٤}د ثم يجرى العمل على هذا الاسلوب

(تنبيهان)

الاول متى كان باقى عملية القسمة غير صفر يكمل خارج القسمة بكسر بسطه الباقى المذكور ومقامه المقسوم عليه

الثانى تقسيم ذات الحدود على مثلها غير ممكن متى كان الحد الاول من المقسوم غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه اوكان الحدان الاخيران منهما كذلك اوكان الحد الاول من اى باق لايقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه اوكان المقسوم والمقسوم عليه مرتبين بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف كالحرف س وكان حاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة أصغر من اسه فى الحد الاخير من المقسوم لانه اذا اجريت عملية القسمة وانتهت بدون باق فالحد الاخير من المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب الحد الاخير من المقسوم عليه فى الحد الاخير من خارج القسمة فاذن يكون أس س فى الحد الاخير من المقسوم مساويا لحاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة وهذا مناقض لما فرضناه من أن حاصل جمع أسى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من أس الحد الاخير من المقسوم مع أن أس س يجب أن يكون دائما متناقصا فى خارج القسمة

وكذلك لاتكون القسمة ممكنة متى كانت ذاتا الحدود مرتبتين بحسب الدرجات التصاعدية لحرف كالحرف المذكور وكان حاصل جمع اسى هذا الحرف فى الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اكبر من اسه فى الحد الاخير من المقسوم

(٢١) قد يكون حرف الترتيب فى ذات الحدود باس واحد فى حدين او اكثر فيجرى عليها ما تقدم من الوضع فى (بند ١٦) بان توضع على احدى الصورتين المتقدمتين مثال ذلك

$\text{٥ح}^{٢}\text{د}^{٣} - \text{٨ح}^{٢}\text{د}^{٢} - \text{٣ح}^{٢}\text{د}$ فيمكن وضعها على احدى هاتين الصورتين

$(\text{٥د}^{٣} - \text{٨د}^{٢} - \text{٣د})\,\text{ح}^{٢}$ أو $\text{ح}^{٢} \left| \begin{array}{l} +\text{٥د}^{٣} \\ -\text{٨د}^{٢} \\ -\text{٣د} \end{array} \right.$

اللتين يدل وضع $\text{ح}^{٢}$ فيهما على انه مضروب فى الجملة $\text{٥د}^{٣} - \text{٨د}^{٢} - \text{٣د}$ معتبرة مكررا لحرف الترتيب $\text{ح}^{٢}$ ولا نجرى فى اعمال التقسيم الآتية الا على الصورة الثانية فاذا اريد تقسيم $\text{ا س}^{٤} + \text{ب س}^{٣} + \text{ح س}^{٢} + \text{د س} + \text{ر}$ على $\text{ا}'\text{ س} + \text{ب}'$ فالمكررات ا و ب و ح الخ و $\text{ا}'$ و $\text{ب}'$ تدل على كميات ذات حدود فحيث أن الاس الاعظم للحرف س فى المقسوم ٤ واسه فى المقسوم عليه واحد يكون اسه فى خارج القسمة ٣ وحيث أن أصغر أس للحرف س فى المقسوم والمقسوم عليه صفر يكون فى خارج القسمة صفرا ايضا ويكون الخارج بهذه الصورة $\text{ا}''\text{ س}^{٣} + \text{ب}''\text{ س}^{٢} + \text{ح}''\text{ س} + \text{د}''$ فعلى ذلك لا يلزم لمعرفة خارج القسمة الا تعيين المكررات $\text{ا}''$ و $\text{ب}''$ و $\text{ح}''$ الخ وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{l|l} \text{ا س}^{٤} + \text{ب س}^{٣} + \text{ح س}^{٢} + \text{د س} + \text{ر} & \text{ا}'\text{ س} + \text{ب}' \\ \cline{2-2} + \text{م س}^{٣} + \text{ح س}^{٢} + \text{د س} + \text{ر} & \text{ا}''\text{ س}^{٣} + \text{ب}''\text{ س}^{٢} + \text{ح}''\text{ س} + \text{د}'' \\ + \text{الخ} + \text{الخ} & \end{array}$$

فلتعيين المكرر $\text{ا}''$ يجب التنبيه على انه اذا ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة فالحاصل الجزئى الناتج من ضرب $\text{ا}'\text{ س}$ فى $\text{ا}''\text{ س}^{٣}$ لا يختصر مع حدود اخر من الكلى لانه يحتوى على اس س بدرجة اعلا من درجته

فى

فى بقية الحواصل الجزئية فيكون الحاصل المذكور مساويا اسـ^٤ فاذن يكون اسـ^٤ = آسـ × أسـ^٣ ومنها يستخرج ا = أ × أ أو أ = ا/أ وحيث علم المكرر أ يضرب المقسوم عليه فى أسـ^٣ ويطرح الحاصل من المقسوم فالباقى مسـ^٣ + حسـ^٢ + ءسـ + ر لا يحتوى الاعلى حاصل ضرب المقسوم عليه فى الجزء سَـسـ^٢ + حَسـ + ءً من خارج القسمة فيستخرج سَـ بتقسيم م على أ وعلى هذا المنوال يكون العمل وحالة التقسيم هذه ليست غير الحالة العامة لانه بتقسيم مكرر اول حد من المقسوم على مكرر اول حد من المقسوم عليه يتوصل الى تقسيم كمية ذات حدود على مثلها

وبيان ذلك فى تقسيم الكمية ذات الحدود

٢٢ ء^٢ح^٢ + ء − ٢ء^٢ + ٦ءح^٤ − ٢٠ح^٣ − ٩ءح^٢ + ٥ح + ٢٣ءح^٣ − ١٠ح^٤

− ٧ءح^{٢٣} − ٣١ءح^٢ + ٥ح^٢ − ٣ءح^{٢٣} + ٤ءح^٣ + ٥ءح على ء^٢ + ٣ءح

− ٢ء − ٥ح فترتب كلتا هاتين الكميتين بالنسبة للدرجات التنازلية للحرف ح وتجمع الحروف المشتملة على حرف الترتيب بدرجة واحدة وصورة العمل هكذا

+٦ى ح^٤ | −٣٠ ح^٣ | +٣ى٢ ح^٣ | −٩ى ح^٢ | ح^٣ + ى ح − ٣ى٢ | ٣ى ح − ٥ | ح^٣ + ى ح − ٣ى٢
−١٠ ح^٤ | +٣٣ى ح^٣ | −٣١ى ح^٢ | −٥
| −٧ى ح^٣ | +٥ | +٤ى ح^٣ | ٢ح^٣ − ٣ى ح^٢ + ٤ى ح + ١
| | −٣ى^٣ | +٥ى | | +٤ | −١

−٣٠ ح^٣
+٢٧ى ح^٣
−٩ى ح^٣

+١٢ى ح^٢
−٣ى٢ ح^٢
+٥ ح^٢

−٥ ح
+٣ى ح | ح^٣ + ى ح − ٣ى

اول قسمة جزئية	ثانى قسمة جزئية
٦ى — ١٠ ÷ (٣ى — ٥) = ٢	−٩ى + ٢٧ى — ٢٠ ÷ (٣ى — ٥) = −٣ى + ٤ ؛ ١٢ى — ٢٠

ثالث قسمة جزئية	رابع قسمة جزئية
١٢ى − ٣ى٢ + ٥ ÷ (٣ى — ٥) = ٤ى — ١ ؛ −٣ى + ٥	٣ى — ٥ ÷ (٣ى — ٥) = ١ ؛ ٠٠ ٠٠

فيلزم أن يكون الحد الاول من خارج القسمة محتويا على ح^٣ ولتحصيل مكرره يقسم مكرر ٦ى — ١٠ على مكرر ٣ى — ٥ (وهذه اول قسمة جزئية) وناتجها ٢ فاذن يكون الحد الاول من خارج القسمة ٢ح^٣ ثم يضرب المقسوم عليه فى ٢ح^٣ أى يضرب ٣ى ح −٥ فى ٢ح^٣ فيحصل ٦ى ح^٤ −١٠

وهذا

وهذا الحد يتماحى مع اول حد من المقسوم وحيث أن حاصل ضرب الباقى من المقسوم عليه فى $٣ح^٣$ يقبل الاختصار مع الجزء التالى من المقسوم يؤل هذا الحاصل بعد اختصاره الى

$$\left.\begin{array}{r} -٢٠ \\ +٣٧\,ء \\ -٩\,ء^٢ \end{array}\right| ح^٣$$

وحيث ان الجزء التالى من خارج القسمة يجب أن يكون محتويا على $ح^٢$ فلتعيين مكرره يقسم $-٢٠ + ٣٧ء - ٩ء^٢$ على $٣ء - ٥$ (وهذه هى ثانى قسمة جزئية) ثم يجرى العمل على هذا المنوال

(٢٢) وهنالك حالة شهيرة فى التقسيم الجبرى وهى الحالة التى يكون فيها المقسوم عليه غير محتو على حرف الترتيب للمقسوم كما اذا اريد تقسيم الكمية ذات الحدود $اس^٢ + ب س + ح$ على $م$ فالمكررات $ا$ و $ب$ و $ح$ و $م$ يمكن أن تكون كميات ذات حدود وحيث أن $م$ لا يحتوى على الحرف $س$ يكون خارج القسمة محتويا على حرف الترتيب بدرجته الكائن بها فى المقسوم وبناء عليه يكون بهذه الصورة $اَ س^٢ + بَ س + حَ$ فاذن لا يحتاج الا لتعيين المكررات $اَ$ و $بَ$ و $حَ$ فحواصل ضرب المقسوم عليه فى حدود خارج القسمة تكون $م اَ س^٢$ و $م بَ س$ و $م حَ$ وهى حواصل لا يقبل بعضها الاختصار مع الآخر لانها محتوية على $س$ باسس مختلفة فتكون حينئذ مساوية للاجزاء المقابلة لها من المقسوم كل لنظيره فيحدث حينئذ بحذف المضاريب المشتركة $س^٢$ و $س$ الخ

$$اَ م = ا \qquad\qquad اَ = \frac{ا}{م}$$

$$بَ م = ب \quad \text{وينتج من ذلك} \quad بَ = \frac{ب}{م}$$

$$حَ م = ح \qquad\qquad حَ = \frac{ح}{م}$$

فحينئذ يقال متى كان المقسوم عليه خاليا من حرف ترتيب المقسوم يلزم لامكان

القسمة أن يكون مكرر كل قوة لهذا الحرف من المقسوم قابلا للقسمة على المقسوم عليه وان يكون حرف الترتيب داخلا في خارج القسمة باس عين اسه في المقسوم ثم يستنتج كل مكرر من خارج القسمة بتقسيم مكرر كل قوة لحرف الترتيب من المقسوم على المقسوم عليه ولنطبق هذه القاعدة على مثال فنقول

اذا اريد تقسيم ٦ د^٣ + ٨ ح د^٣ − ٩ ح هـ − ٩ هـ^٢ + ٤ د ح^٢ − ٢٧ ح هـ^٣

على ٢ د − ٣ هـ توضع صورة العمل كما سبق في الحالة المتقدمة هكذا

+ ٨ د^٣ | + ٤ د ح^٢ + ٦ د ح − ٩ هـ | ٢ د − ٣ هـ
− ٢٧ هـ^٣ | − ٩ هـ^٢ |
———
+ ٤ د^٢ | ح^٢ + ٢ د | ح + ٣
+ ٦ د هـ | + ٣ هـ |
+ ٩ هـ^٢ |

القسمة الجزئية الاولى

٨ د^٣ − ٢٧ هـ^٣ | ٢ د − ٣ هـ
١٢ د^٢ هـ − ٢٧ هـ^٣ | ٤ د^٢ + ٦ د هـ + ٩ هـ^٢
١٨ د هـ^٢ − ٢٧ هـ^٣

القسمة الجزئية الثانية

٤ د^٢ − ٩ هـ^٢ | ٢ د − ٣ هـ
٦ د هـ − ٩ هـ^٢ | ٢ د + ٣ هـ

القسمة الجزئية الثالثة

٦ د − ٩ هـ | ٢ د − ٣ هـ
٠٠ ٠٠ | ٣

(٢٣) مما يحتاج اليه غالبا التحليل مقدار جبري الى حاصل ضرب مركب من مضروبين احدهما معلوم والآخر مجهول ومن البديهي ان استخراج المضروب المجهول يكون بتقسيم الكمية الجبرية المفروضة على المضروب المعلوم

فاذا اريد مثلا تحويل ١٢ ح د^٥ − ٤ ح د^٣ الى مضروبين احدهما ٤ ح^٣

ينتج

ينتج $٤ ح^٣ (٣ ح^٢ د^٢ - د^٢)$ وهذا هو المسمى بوضع $٤ ح^٣$ مضروبا مشتركا

واذا اريد جعل $٣ ح د^٢$ مضروبا مشتركا فى المقدار $٦ ح^٣ د^٣ - ٣ ح^٢ د^٢ - ٣ ح د^٢$ يحدث $٣ ح د^٢ (٢ ح د^٢ - ١ - \frac{د^٢}{٣ ح})$

(٢٤) فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة يقبل القسمة على الفرق بينهما غير مرفوعتين لانه اذا ابتدأ بتقسيم $ح^م - د^م$ على $ح - د$ بان وضعت صورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} ح^م - د^م & ح - د \\ \hline ح^{م-١} د - د^م & ح^{م-١} + ح^{م-٢} د + ح^{م-٣} د^٢ \\ ح^{م-٢} د^٢ - د^م & \end{array}$$

نتج $ح^{م-١}$ وهو اول حد من خارج القسمة وكان الباقى الاول $ح^{م-١} د - د^م$ وحيث أن المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا فى خارج القسمة زائدا الباقى يحدث

$$ح^م - د^م = (ح - د) ح^{م-١} + ح^{م-١} د - د^م$$

واذا وضع د مضروبا مشتركا فى الحدين الاخيرين $ح^{م-١} د$ و $د^م$ حدث $ح^م - د^م = (ح - د) ح^{م-١} + د (ح^{م-١} - د^{م-١})$

ومن المعلوم أن $ح^م - د^م$ حاصل جمع الجزءين $(ح - د) ح^{م-١}$ و $د (ح^{م-١} - د^{م-١})$ لكن الجزء الاول وهو $(ح - د) ح^{م-١}$ قابل للقسمة على $ح - د$ فاذا كان الجزء الثانى $د (ح^{م-١} - د^{م-١})$ قابلا للقسمة على $ح - د$ كان حاصل جمعهما $ح^م - د^م$ كذلك لكن الجزء الثانى $د (ح^{م-١} - د^{م-١})$ حاصل ضرب مركب من مضروبين فيكفى لجعل

هذا الحاصل قابلا للقسمة على $ح - ى$ أن يكون احد مضروبيه ($ح^{م-1} - ى^{م-1}$) قابلا للقسمة على $ح - ى$ فاذا كان $ح^{م-1} - ى^{م-1}$ قابلا للقسمة على $ح - ى$ يكون $ح^م - ى^م$ كذلك أعنى اذا كان فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلا رفع يكون فاضل الكميتين المذكورتين مرفوعتين لقوة اعلى بواحد من قوتهما الاصلية قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلا رفع

وحيث علم أن الفاضل $ح^٢ - ى^٢$ يقبل القسمة على $ح - ى$ لأن $ح^٢ - ى^٢$ $= (ح + ى)(ح - ى)$ يكون $ح^٣ - ى^٣$ قابلا للقسمة على $ح - ى$ فحينئذ $ح^٤ - ى^٤$ يقبل القسمة على $ح - ى$ وهكذا فتكون هذه القاعدة عامة الاثبات

فحينئذ اذا اجرى العمل على $ح^٦ - ى^٦$ يحدث

$\frac{ح^٦ - ى^٦}{ح - ى} = ح^٥ + ح^٤ى + ح^٣ى^٢ + ح^٢ى^٣ + حى^٤ + ى^٥$ وعلى هذا المنوال يكون

$$\frac{ح^م - ى^م}{ح - ى} = ح^{م-1} + ح^{م-٢}ى + ح^{م-٣}ى^٢ + \cdots + ح^٢ى^{م-٣} + حى^{م-٢} + ى^{م-1}$$

فينتج من كيفية تكوين خارج قسمة $ح^م - ى^م$ على $ح - ى$

اولا ان جميع حدود خارج القسمة تكون موجبة

وثانيا أن جميع المكررات تكون مساوية للوحدة

وثالثا أن اس حرف $ح$ يتناقص بواحد على التوالى من ابتداء الحد الاول الذى اسه $م - ١$ الى الحد الاخير الذى اسه صفر

ورابعا أن اس حرف $ى$ يتزايد بواحد من ابتداء الحد الاول الذى اسه صفر الى الحد الاخير الذى اسه يكون مساويا $(م - ١)$

(٢٥) ولنذكرهنا نتائج فنقول

الاولى $\text{حـ}^{م} + \text{ء}^{م}$ لاتقبل القسمة على $\text{حـ} - \text{ء}$

الثانية $\text{حـ}^{م} - \text{ء}^{م}$ تقبل القسمة على $\text{حـ} + \text{ء}$ اذا كان م زوجا فان كان فردا فلاتقبل القسمة على $\text{حـ} + \text{ء}$

والثالثة $\text{حـ}^{م} + \text{ء}^{م}$ تقبل القسمة على $\text{حـ} + \text{ء}$ اذا كان م فردا ولاتقبل القسمة على $\text{حـ} + \text{ء}$ اذا كان م زوجا ولنبرهن على هذه النتائج مع السهولة بواسطة القواعد الآتية فى البند التالى وان كان يمكن البرهنة عليها ايضا من غير واسطة باجراء عملية التقسيم على وجه التجربة اى اختبار الحالة التى فيها تنتهى العملية والتى لا تنتهى فيها فنقول

(٢٦) اذا فرض فى الكمية ذات الحدود

$$\text{سـ}^{م} + \text{ح}\,\text{سـ}^{م-1} + \text{ك}\,\text{سـ}^{م-2} + \cdots + \text{ر}\,\text{سـ} + \text{ل}$$

أن $\text{سـ} = \text{حـ}$ وآلت به الى صفر تكون هذه الكمية قابلة للقسمة على $\text{سـ} - \text{حـ}$ لانه اذا اجريت قسمة هذه الكمية على $\text{سـ} - \text{حـ}$ هكذا

$$\text{سـ}^{م} + \text{ح}\,\text{سـ}^{م-1} + \text{ك}\,\text{سـ}^{م-2} + \cdots + \text{ر}\,\text{سـ} + \text{ل} \;\Big|\; \text{سـ} - \text{حـ}$$

$$+\text{حـ} \;\; \text{سـ}^{م-1} + \text{ك}\,\text{سـ}^{م-2} + \cdots + \text{ر}\,\text{سـ} + \text{ل} \;\Big|\; \text{سـ}^{م-1} + \text{حـ}\,\text{سـ}^{م-2} + \text{حـ}^{2}\,\text{سـ}^{م-3} + \cdots + \text{حـ}^{م-1}$$

$$+\text{ح} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\text{ح} \quad +\text{ح}\,\text{حـ} \quad +\text{ح}\,\text{حـ}^{م-2}$$

$$+\text{حـ}^{2} \;\; \text{سـ}^{م-2} + \cdots + \text{ر}\,\text{سـ} + \text{ل} \qquad +\text{ك} \quad +\text{ك}\,\text{حـ}^{م-3}$$

$$+\text{ح}\,\text{حـ} \qquad\qquad +$$

$$+\text{ك} \qquad\qquad \vdots$$

$$\qquad\qquad +\text{ر}$$

يكون $\text{سـ}^{م-1}$ هو الحد الاول من خارج القسمة و $(\text{حـ} + \text{ح})\,\text{سـ}^{م-1}$ هو اول حد من الباقى بوضع $\text{سـ}^{م-1}$ مضروبا مشتركا فى الحدين المحتويين على

$ح^{م-١}$ ويكون الحد الثانى من خارج القسمة $(ح + ع)\ س^{م-٢}$

والحد الاول من الباقى التالى له هو $(ح^{٢} + ع\ ح + ك)\ س^{م-٢}$ وبهذه الكيفية تدام العملية

فمتى توصل الى باق حده الاول لايحتوى الاعلى $س$ باس مساو للواحد كان لهذا الحد الاول من هذا الباقى مكرر بهذه الصورة

$ح^{م-١} + ع\ ح^{م-٢} + ك\ ح^{م-٣} + \cdots + ر$ والحد التالى لخارج القسمة يكون

$ح^{م-١} + ع\ ح^{م-٢} + ك\ ح^{م-٣} + \cdots + ر$ وبناء عليه يكون الباقى التالى لهذا الحد هو

$$ح^{م} + ع\ ح^{م-١} + ك\ ح^{م-٢} + \cdots + ر\ ح + ل$$

وهو باق لايخالف الكمية ذات الحدود المفروضة الا بوضع $ح$ فيه بدل $س$ فاذا اعتبر الفرض الاول المتقدم أى فرض $س = ح$ الذى به تؤل الكمية الى صفر يكون الباقى وهو $ح^{م} + ع\ ح^{م-١} + ك\ ح^{م-٢} + \cdots\cdots + ر\ ح + ل$ مساويا للصفر ويكون التقسيم ممكنا

(فى الكسور)

(٢٧) الكسر الجبرى يدل كما فى الحساب على خارج قسمة البسط على المقام فعلى هذا يكون كسر $\frac{ح}{ء}$ دالا على خارج قسمة $ح$ على $ء$

والبراهين التى اجريت فى علم الحساب لبيان القواعد المسلوكة فى العمليات المتعددة للكسور ناتجة من التعريف السابق أو من تعريف يكون هذا التعريف نتيجة له

وقد فرض فى هذه البراهين أن الحدين $ح$ و $ء$ عددان صحيحان لكن هذان الحدان قد يكونان فى علم الجبر كسرين فاذن يجب علينا أن نبين جميع القواعد المتعلقة بالكسور فنقول

الاولى اذا ضرب بسط كسر فى كمية ما أو قسم عليها كان ذلك الكسر

مضروبا

مضروبا فى هذه الكمية أو مقسوما عليها فاذا فرض $\frac{ج}{ء}$ مثلا كسرا معلوما ورمز له بالحرف ك وضرب بسطه فى ه كان ذلك الكسر مضروبا فى ه لانه ينتج من $\frac{ج}{ء} = ك$ أن $ج = ءك$ فاذا ضرب طرفا هذه المتساوية فى ه يحدث $جه = هءك$ ومنها ينتج $\frac{جه}{ء} = هك = \frac{ج}{ء} \times ه$

ومثل هذا يقال فى $\frac{ج:ه}{ء} = ك : ه$

الثانية اذا ضرب مقام كسر فى كمية واحدة أو قسم عليها كان ذلك الكسر مقسوما على هذه الكمية أو مضروبا فيها وعلى هذا يبرهن بمثل ما تقدم

الثالثة اذا ضرب حدا الكسر فى كمية واحدة أو قسما عليها فقيمة الكسر لا تتغير ويعلم من ذلك انه يمكن اختصار كسر بتقسيم حديه على مضروب مشترك احتويا عليه فحينئذ

$$\frac{١٢ جء^{٢}ه^{٥}}{٨ جء ٤ ه^{٣}} = \frac{٣ جه^{٢}}{٢ ءه^{٢}}$$

ويعلم من ذلك أن القاعدة المستعملة فى الحساب لتحويل كسور الى ذات مقام واحد يمكن استعمالها فى الجبر فاذا اريد مثلا تحويل الكسور $\frac{ج}{ء}$ و $\frac{هـ}{و}$ و $\frac{م}{ن}$ الى ذات مقام واحد كان الناتج المطلوب بعد اجراء العملية $\frac{جون}{ءون}$ و $\frac{هـءن}{ءون}$ و $\frac{مءو}{ءون}$ واذا اريد تحويل الكسور $\frac{م}{١٢ جء^{٤}}$ و $\frac{ه}{١٥ج^{٥}}$ و $\frac{ج}{١٠ جء^{٤}}$ الى ذات مقام واحد يقال حيث وجد للمقامات مضاريب مشتركة تختصر القاعدة العمومية بأن يبحث كما فى الحساب عن المضاعف الاصغر المشترك للمقامات الثلاثة فيحلل اولا كل من المقامات الى مضاريب اولية فيحدث

$$١٢ جء^{٤} = ٢^{٢} \times ٣ \times ج \times ء^{٤} \quad و \quad ١٥ج^{٥} = ٣ \times ٥ \times ج^{٥} \quad و \quad ١٠ جء^{٤} = ٢ \times ٥ \times ج \times ء^{٤}$$

ثم يحصل حينئذ حاصل ضرب يحتوى على المضاريب الاصلية المتقدمة باعلى اس موجود فيها هكذا

$$٢^{٢} \times ٣ \times ٥ \times ج^{٥} \times ء^{٤}$$

وهذا الحاصل هو المقام المشترك البسيط الذى يمكن اعطاؤه للكسور المفروضة فلم يبق الاضرب حدى كل كسر من الكسور المتقدمة فى خارج قسمة ٢^٢ × ٣ × ٥ × حـ^٥ × ء^٤ على مقامه فاذن يضرب حدا الكسر الاول فى ٥ حـ ء^٣ والثانى فى ٤ ء^٤ والثالث فى ٦ حـ^٤ فيحدث

(٥ حـ ء م^٣) / (٤٥ / ٦٠ حـ ء) و (٤ ء ڡ^٤) / (٤٥ / ٦٠ حـ ء) و (٦ حـ ح^٤) / (٤٥ / ٦٠ حـ ء)

الرابعة لطرح كسرين أو جملة كسور ذات مقام مشترك أو جمعهما تجرى عملية الطرح أو الجمع على البسوط ثم يعطى للناتج المقام المشترك لانه اذا أجرى العمل على الكسور حـ/م + ء/م − هـ/م مثلا وفرض أن الناتج المطلوب س كان حـ/م + ء/م − هـ/م = س فحينئذ يضرب كل من الطرفين فى م فيحدث

حـ + ء − هـ = م س وينتج من ذلك

س = (حـ + ء − هـ) / م

فاذا كانت مقامات الكسور المفروضة غير متحدة ابتدئ بتحويلها الى ذات مقام واحد ثم يجرى عليها ما فى القاعدة المتقدمة

الخامسة لضرب كسر فى آخر يضرب بسط أحدهما فى بسط الآخر ومقامه فى مقامه ويجعل الحاصل الثانى مقاما للحاصل الاول فاذا اريد ضرب حـ/ء فى هـ/و مثلا فبفرض أن ع رمز للكسر الاول و ك رمز للثانى يوجد حـ = ء ع و هـ = و ك فاذن يكون

حـ × هـ = ء × ع × و × ك أو حـ هـ = ء و ع ك فيكون

حـ هـ / ء و = ع × ك أو حـ هـ / ء و = حـ/ء × هـ/و

وينتج من ذلك انه لضرب صحيح فى كسر يضرب الصحيح فى بسط الكسر ثم يجعل مقام الكسر المفروض مقاما لذلك الحاصل

السادسة لتقسيم كسر على كسر يضرب الكسر الذى هو عبارة عن المقسوم

في الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم عليه مقلوبا فاذا فرض ان $\frac{ح}{د}$ مقسوم على $\frac{هـ}{و}$ فيجعل $\frac{ح}{د} = ع$ و $\frac{هـ}{و} = ك$ يكون $ح = د ع$ و $هـ = و ك$ ومنها يحدث

$$\frac{ح}{هـ} = \frac{دع}{وك} \text{ أو } \frac{ح}{دهـ} = \frac{ع}{وك} \text{ أو } \frac{حو}{دهـ} = \frac{ع}{ك} \text{ أو } \frac{ح}{د} : \frac{هـ}{و} = \frac{حو}{دهـ}$$

وبمثل ذلك يبرهن على تقسيم الصحيح على كسر فيضرب الصحيح في الكسر مقلوبا

(في الاسس السالبة)

(٢٨) متى وجد حرف من المقسوم أسه أقل من أسه في المقسوم عليه كانت القسمة مستحيلة فقسمة $ح^{٣}$ على $ح^{٥}$ مستحيلة لكنهم اتفقوا على تبيين خارج القسمة بكتابة حرف ح بأس مساو للفاضل $٣ - ٥$ أي -٢ فاذن يكون $\frac{ح^{٣}}{ح^{٥}} = ح^{-٢}$

وينتج من ذلك انه اذا وجد حرف ذو أس سالب كان ناتجا من عملية قسمة مستحيلة

(٢٩) الحرف ذو الاس السالب يساوي واحدا مقسوما على هذا الحرف بأسه موجبا فاذا قسم $ح^{م}$ على $ح^{م+ع}$ تحصل بمقتضى ما تقدم في (٢٨)

$$\frac{ح^{م}}{ح^{م+ع}} = ح^{م-م-ع} = ح^{-ع} \text{ وحيث أن } \frac{ح^{م}}{ح^{م+ع}} = \frac{ح^{م}}{ح^{م} \times ح^{ع}}$$

يقال اذا قسم كل من حدى هذا الكسر على $ح^{م}$ حدث $\frac{ح^{م}}{ح^{م+ع}} = \frac{1}{ح^{ع}}$ ومعلوم أن $ح^{م}$ مقسوما على $ح^{م+ع}$ مساو $ح^{-ع}$ فيكون

$$ح^{-ع} = \frac{1}{ح^{ع}}$$

(٣٠) قد برهنا سابقا فى قاعدة الاسس على ضرب الحدود ذات الاسس الموجبة فقط والغرض الآن البرهنة على أن هذه القاعدة توافق الاسس السالبة فحاصل $ح^{م}$ فى $ح^{-ن}$ مثلا يكون مساويا $ح^{م-ن}$ لان $ح^{م} \times ح^{-ن} = ح^{م} \times \frac{1}{ح^{ن}} = \frac{ح^{م}}{ح^{ن}} = ح^{م-ن}$ وبمثل هذا يبرهن على الحالات الاخر

فحينئذ قاعدة الاسس الموجبة فى تقسيم الحدود توافق الاسس السالبة لان هذه القاعدة ناتجة من قاعدة الضرب

بيان ذلك بالامثلة أن يقال

لضرب $ح^{-م}$ فى $ح^{-ن}$ يقال $ح^{-م} \times ح^{-ن} = \frac{1}{ح^{م}} \times \frac{1}{ح^{ن}} = \frac{1}{ح^{م+ن}} = ح^{-(م+ن)}$

ولقسمة $ح^{م}$ على $ح^{-ن}$ يجرى العمل هكذا $ح^{م} : ح^{-ن} = ح^{م} : \frac{1}{ح^{ن}} = ح^{م+ن}$

ولقسمة $ح^{-م}$ على $ح^{-ن}$ يجرى العمل هكذا $ح^{-م} : ح^{-ن} = \frac{1}{ح^{م}} : \frac{1}{ح^{ن}} = \frac{ح^{ن}}{ح^{م}} = ح^{ن-م}$

ولايجاد حاصل ضرب كميتين مشتملتين على حدود كسرية اوخارج قسمتهما على بعض تحول الكميتان الى اخريين صحيحتين باستعمال الاسس السلبية من غير تغييرمكررات حدودها الرقية ثم ترتب الاسس المذكورة باعتبارها اعدادا اصغر من صفر تاخذ فى الصغر كلما ازادت فى المقدار المطلق ثم تجرى عليها طرق الضرب أو القسمة فاذا اريد مثلا ضرب $\frac{3}{2س^{2}} + س^{2} - 2 + \frac{1}{3س} - 2س$ فى $\frac{2}{س} - 3 - س$ يوضعان هكذا

$$\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٢ \quad + \frac{١}{٣}\,\text{س}^{-١} + \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{-٢}$$

$$-\text{س} - ٣ \quad + ٢\,\text{س}^{-١}$$

$$-\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - \frac{١}{٣}\,\text{س}^{٠} - \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{-١}$$

$$-٣\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + ٦\,\text{س}^{٠} - \text{س}^{-١} - \frac{٩}{٢}\,\text{س}^{-٢}$$

$$+ ٢\,\text{س} - ٤\,\text{س}^{٠} - ٤\,\text{س}^{-١} + \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{-٢} + \frac{٦}{٢}\,\text{س}^{-٣}$$

$$-\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س} + \frac{٥}{٣}\,\text{س}^{٠} - \frac{١٣}{٢}\,\text{س}^{-١} - \frac{٢٣}{٦}\,\text{س}^{-٢} + ٣\,\text{س}^{-٣}$$

فيشاهد أن الحاصل مرتب من نفسه وان حده الاول والاخير ليسا مختصرين وان الاول حادث من ضرب الحدين الاولين فى بعضهما والاخير من ضرب الاخيرين فى بعضهما ومثل ذلك يجرى فى عملية التقسيم

(الباب الثانى)

(فى المعادلات والمسائل التى بدرجة اولى)

(٣١) الكميتان المتساويتان اللتان لايحتويان الاعلى اعداد معلومة مبينة بحروف يسميان متساويه وذلك كالمتساوية $\text{ح} + \text{د} = \text{هـ} - \text{و}$ التى فيها ح و د و هـ و و دالة على كميات معلومة

والمتساويه متى تحققت بمقادير الحروف المعلومة أو المجهولة الداخلة فيها كائنة ما كانت تسمى متطابقة وذلك كالمتطابقة

$$\text{ح}^{٢} - \text{د}^{٢} = (\text{ح}+\text{د})\,(\text{ح}-\text{د}) \quad \text{و} \quad ٣\,\text{س} - \text{ح}^{٢} = ٢\,\text{س} + \text{س} - \text{ح}^{٢}$$

والمتساوية التى لايتحقق تساويها الا بمقادير مخصوصة للمجاهيل الداخلة فيها تسمى معادلة فحينئذ $٣\,\text{س} - ٥ = ٧$ معادلة لان تساويها لايتحقق بأى مقدار فرض للمجهول س

كل من الكميتين المفصولتين عن بعضهما فى كل متساوية بالعلامة $=$ تسمى طرفا لكن الكمية التى على اليمين تسمى الطرف الاول والتى على اليسار

تسمى الطرف الثانى –

المعادلة الرقمية ما كانت الكميات المعلومة فيها مبينة بارقام والحرفية ما كانت الكميات المذكورة فيها مبينة بحروف فحينئذ ٣ س ـــ ٥ = ٧ معادلة رقمية و ٣ س ـــ ح = د معادلة حرفية

وحل المعادلة هو البحث عن المقدار الذى اذا وضع بدل مجهولها صيرها متطابقة ويسمى هذا المقدار بحل المعادلة

متى تحققت جملة معادلات بجملة واحدة من مقادير مجاهيلها تسمى هذه المقادير بحل جملة هذه المعادلات فحل هذه المعادلات هو البحث عن المقادير التى اذا وضعت بدل المجاهيل صيرتها متطابقة

وهذه المعادلات تمتاز احداها عن الاخرى بدرجتها .

واذا جمعت اسس مجاهيل كل حد من معادلة فاعظم حواصل الجمع يدل على درجة المعادلة فحينئذ معادلة ٣ س ـــ ٥ = ٧ معادلة ذات درجة اولى ومعادلة ٥ س ـــ ٢ $س^{٢}$ = ٩ معادلة ذات درجة ثانية ومعادلة ٣ س ـــ $\frac{٤}{٩}$ ـــ ٢ $س^{٢}$ = ٨ س $ص^{٢}$ معادلة ذات درجة ثالثة

وهذه القضية غير مطردة متى كان المجهول داخلا فى المعادلة مقام الكسر اذ لا يحكم بدرجة المعادلة فى هذه الحالة الا بعد حذف المقامات بالطريقة الآتية

وتمتاز المعادلات المتحدة الدرجة عن بعضها بعدد مجاهيلها

واسهل المعادلات حلا المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد

(فى بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى)

(والمجهول الواحد)

(٣٢) ولنذكر بعض قواعد متعارفة فنقول

تعادل المعادلة لا يتغير

اولا

اولا اذا ضم لكل من طرفيها كمية واحدة أو طرحت من كل منهما

وثانيا اذا ضرب كل من طرفيها فى كمية واحدة أو قسم كل منهما عليها

وثالثا اذا جمعت معادلتان الى بعضهما بأن جمع الطرف الاول للاولى والثانى للثانى اوطرحتا من بعضهما أو ضربتا فى بعضهما أو قسمتا على بعضهما

فحيث تقرر ذلك يجب أن نشتغل بالتحويلين المهمين فنقول

الاول كل معادلة كالمعادلة $5\text{س} - 4 = 2\text{س} + 7$ يلزم لحلها أن يكون المجهول فى الطرف الاول منها ولتحصيل ذلك يطرح من كلا طرفيها 2س فتصير $5\text{س} - 4 - 2\text{س} = 7$ ثم يضم الى كل من طرفيها 4 فتصير $5\text{س} - 2\text{س} = 7 + 4$ فالحد 2س الذى كان فى الطرف الثانى موجبا صار فى الطرف الاول سالبا و 4 الذى كان فى الطرف الاول سالبا صار فى الطرف الثانى موجبا فاذن يلزم لتحويل حد من طرف الى طرف تغيير علامته فقط

والثانى كل معادلة كالمعادلة $\frac{2\text{س}}{3} - \frac{4}{5} + 7 = \frac{\text{س}}{2}$ يلزم لحلها ان تحذف المقامات ولذا تحول اولا الكسور والعدد الصحيح 7 الى ذات مقام واحد كما عرف من القواعد المعلومة فتصير $\frac{20\text{س}}{30} - \frac{24}{30} + \frac{210}{30} = \frac{15\text{س}}{30}$ ثم يضرب كل من طرفى هذه المعادلة فى 30 لحذف المقام فتصير

$$20\text{س} - 24 + 210 = 15\text{س}$$

وقد يتوصل لهذا الناتج من اول الامر بدون كتابة المقام المشترك أى أنه لحذف مقامات معادلة يضرب بسط كل كسر فى حاصل ضرب مقامات الكسور الاخر ثم يضرب الصحيح فى حاصل ضرب المقامات

(تنبيه)

هذه القاعدة تختصر فى الحالة التى يكون فيها للمقامات المعلومة مضاريب مشتركة

فالمعادلة $\frac{5\text{س}}{6} - \frac{3}{4} = \frac{2\text{س}}{9} + 7$ المحتوية على مقامات ذات مضاريب

مشتركة يسهل فيها تحويل جميع الكسور والعدد الصحيح الى ذوات
مقام واحد باخذ المكرر الاصغر المشترك وهو ٣٦ مقاما مشتركا لجميع
المقامات فاذن يكفى ضرب الصحيح فى ٣٦ ثم ضرب حدى كل كسر
فى خارج قسمة ٣٦ على مقام هذا الكسر فيحدث بعد حذف المقام
المشترك

$$٣٠س - ٢٧ = ٨س + ٢٥٢$$

فحينئذ يلزم لحذف مقامات معادلة ذات مضاريب مشتركة أن يبحث عن
المكرر المشترك الاصغر لهذه المقامات ويضرب العدد الصحيح فيه ثم يضرب
بسط كل كسر فى خارج قسمة المكرر المذكور على مقام هذا الكسر

(٣٣) لتطبيق هذه القاعدة على حل المعادلة

$$\frac{٧(٢س-٣)}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٣س}{٤}$$

نجرى عملية الضرب المبينة فى بسط الكسر الاول فيحصل

$$\frac{١٤س-٢١}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٣س}{٤}$$

ثم تحذف المقامات بملاحظة العدد ٦٠ مكررا مشتركا أصغر للاعداد
١٥ و ١٠ و ٤ فيحدث

$$٥٦س - ٨٤ - ٦ = ٢٤٠ + ٤٥س$$

ثم تحول الحدود المجهولة الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الثانى فتصير
المعادلة

$$٥٦س - ٤٥س = ٢٤٠ + ٨٤ + ٦$$

وبعد الاختصار تصير

$١١س = ٣٣٠$ وبقسمة طرفيها على ١١ يحدث

$س = \frac{٣٣٠}{١١} = ٣٠$ أى $س = ٣٠$ ولتحقيق هذا المقدار يوضع
العدد ٣٠ فى المعادلة $\frac{٧(٢س-٣)}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٣س}{٤}$ بدل
س فتصير $\frac{٧(٦٠-٣)}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٩٠}{٤}$ ومنها يستنتج

$$\frac{٧\times٥٧}{١٥}$$

$\frac{٧\times٥٧}{١٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٤٥}{٢}$ أى

$\frac{١٣٣}{٥} - \frac{١}{١٠} = ٤ + \frac{٤٥}{٢}$ أى

$٢٦٦ - ١ = ٤٠ + ٢٢٥$ أى

$٢٦٥ = ٢٦٥$

وحيث غير المجهول س فى المعادلة المفروضة بالمقدار ٣٠ فصارت متطابقة يكون العدد ٣٠ هو حل هذه المعادلة وحل المعادلة

$\frac{س^٢}{٦ح} - ١ = \frac{ح(س^٢ - ٣ب)}{٤ب^٢} - \frac{ح(ح^٢ - ب^٢)}{٣ب^٣} - \frac{٢}{٣}$ تجرى عملية الضرب المبين فيها وتحذف المقامات بملاحظة أن $١٢ح^٢ب^٣$ هو المضروب المشترك الاصغر لجميع المقامات فيحدث

$$٢بس^٤ - ١٢ح^٢ب^٣ = ٣ح^٣بس - ٦ح^٣ب^٢ - ٦ح^٥ + ٦ح^٣ب^٢ - ٨ح^٢ب^٣$$

أو يحدث بعد ترك حدى $-٦ح^٣ب^٢$ و $+٦ح^٣ب^٢$ المتماحيان وتحويل المجاهيل الى الطرف الاول والمعاليم الى الثانى

$$٢بس^٤ - ٣ح^٣بس = ١٢ح^٢ب^٣ - ٦ح^٥ - ٨ح^٢ب^٣$$

ثم يوضع س مضروبا مشتركا فى الطرف الاول وتختصر الحدود المتشابهة وهى $+١٢ح^٢ب^٣$ و $-٨ح^٢ب^٣$ الموجودة فى الطرف الثانى فيحدث $(٢ب^٤ - ٣ح^٣ب)س = ٤ح^٢ب^٣ - ٦ح^٥$ وبقسمة طرفيها على مكرر س يحدث

$$س = \frac{٤ح^٢ب^٣ - ٦ح^٥}{٢ب^٤ - ٣ح^٣ب}$$

ويمكن اختصار مقدار س بوضع $٢ح^٢$ مضروبا مشتركا فى البسط و ب مضروبا مشتركا فى المقام فيصير

$$\text{س} = \frac{\text{٢ح}^{\text{٢}}(\text{٢ب}^{\text{٣}} - \text{٣ح}^{\text{٣}})}{\text{ب}(\text{٢ب}^{\text{٣}} - \text{٣ح}^{\text{٣}})} = \frac{\text{٢ح}^{\text{٢}}}{\text{ب}}$$

ولنحقق هذا المقدار بغير المجهول س في المعادلة المفروضة بمقداره وهو $\frac{\text{٢ح}^{\text{٢}}}{\text{ب}}$ وبهذا التغيير يعلم هل المعادلة متطابقة ام لا

(قاعدة عمومية)

لحل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يلزم

اولا اجراء عملية الضرب الكائن فيها ان وجدت ثم حذف المقامات

وثانيا تحويل الحدود المشتملة على المجاهيل الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار الحدود المجهولة لتصير حدا واحدا ان كانت المعادلة رقمية وجعل المجهول مضروبا مشتركا ان كانت المعادلة حرفية

ورابعا تقسيم طرفها الثاني على المكرر الرقمي أو الحرفي للمجهول فخارج القسمة يكون مقدار المجهول المذكور

(٣٤) يمكن تغيير علامات معادلة بدون أن يتغير التساوي الواقع بين طرفيها لانه لو فرضت معادلة ٥ س − ٢ = ٣ س + ٥ وحولت جميع حدود الطرف الاول الى الثاني وحدود الثاني الى الاول لصارت − ٣ س − ٥ = − ٥ س + ٢ وبعكس الطرفين يحدث − ٥ س + ٢ = − ٣ س − ٥ وهي لا تخالف المعادلة الاولى الا بتغيير علامات جميع حدودها

(في المعادلات ذات الدرجة الاولى وجملة المجاهيل)

(٣٥) كل معادلة ذات مجهولين لها حلول غير منتهية العدد لانه اذا فرض لاحد المجهولين مقدار اختياري حدث للمجهول الآخر مقدار مطابق له فاذا فرضت معادلة ٣ س − ٢ ص = ٥ وجعل فيها ص = ١ حدث س = $\frac{\text{٥} + \text{٢}}{\text{٣}}$ = $\frac{\text{٧}}{\text{٣}}$ فاذن يكون مقدار س = $\frac{\text{٧}}{\text{٣}}$ ومقدار

ص

صـ = ١ حلا للمعادلة وكلما فرض للمجهول صـ مقدار ما وجد للمجهول سـ مقدار جديد فيكون للمعادلة المفروضة حلول غير منتهية العدد

(٣٦) ولنشتغل الآن بحل معادلتين ذاتى مجهولين بطرق أربع فنقول الطريقة الاولى طريقة الوضع وهى حذف المجهول بوضع مقداره المستخرج من المعادلة الاولى فى الثانية فاذا فرضت معادلتان

$$٣ سـ + ٤ صـ = ١٠ \quad و$$

$$٥ سـ - ٧ صـ = ٣$$

واريد حذف احد المجهولين منهما يستخرج من احداهما مقداره بفرض الآخر معلوما فاذا استخرج مقدار صـ من الاولى بفرض سـ معلوما حدث $\frac{١٠ - ٣ سـ}{٤} = صـ$ وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الثانية تصير محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥ سـ - \frac{٧٠ - ٢١ سـ}{٤} = ٣$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة الوضع أن يستخرج من احداهما مقدار احد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يغير هذا المجهول بمقداره فى المعادلة الثانية

الطريقة الثانية طريقة التساوى او المقارنة وهى حذف احد المجهولين من المعادلتين باستخراج مقداره من كل منهما وتسوية هذين المقدارين ببعضهما فاذا اريد حذف احد المجهولين صـ من المعادلتين المذكورتين يستخرج مقداره من كل منهما بفرض المجهول الآخر معلوما فيحدث من احداهما صـ = $\frac{١٠ - ٣ سـ}{٤}$ ومن الاخرى صـ = $\frac{٥ سـ - ٣}{٧}$ وبتساوى هذين المقدارين تحدث معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$\frac{١٠ - ٣ سـ}{٤} = \frac{٥ سـ - ٣}{٧}$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتى مجهولين بواسطة طريقة التساوى أن يستخرج من كل منهما مقدار أحد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يسوى هذان المقداران ببعضهما

الطريقة الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح
فاذا فرض أن المطلوب حذف المجهول ص من المعادلتين

٥ س − ٣ ص = ٩ و
٢ س + ٣ ص = ١٢

وجب التنبيه على أن ص له مكرر متحد فى المعادلتين المذكورتين ذو علامتين متخالفتين فلحذفه يكفى جمع هاتين المعادلتين الى بعضهما طرفا الى طرف وبهذا تحدث معادلة محتوية على مجهول واحد هكذا

٥ س + ٢ س = ٩ + ١٢

واذا فرض ان المطلوب حذف المجهول ص من المعادلتين

٣ س + ٤ ص = ١٠ و ٥ س − ٧ ص = ٣

وجب اولا ان يجعل مكرر ص فيهما واحدا بضرب طرفى المعادلة الاولى فى مكرر ص من المعادلة الثانية وهو ٧ ثم ضرب طرفى المعادلة الثانية فى مكرر ص من الاولى وهو ٤ فيحدث

٢١ س + ٢٨ ص = ٧٠ و
٢٠ س − ٢٨ ص = ١٢

فاذا جمعت هاتان المعادلتان الى بعضهما حدثت معادلة ذات مجهول واحد هكذا ٢١ س + ٢٠ س = ٧٠ + ١٢

واذا اتحدت علامة المجهول ص فى كل من المعادلتين أجرى طرح المعادلتين من بعضهما طرفا من طرف عوض جمعهما

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتى مجهولين بطريقة الجمع أو الطرح أن يجعل مكررا المجهول المراد حذفه من كل من المعادلتين واحدا وطريق الوصول الى ذلك أن يضرب طرفا المعادلة الاولى فى مكرر هذا المجهول من الثانية ثم يضرب طرفا الثانية فى مكرر المجهول المذكور من الاولى ثم يجمع المعادلتان على بعضهما أو تطرح احداهما من الاخرى بحسب اختلاف واتحاد علامته فى كل من المعادلتين المفروضتين

(تنبيه)

الغرض من ضرب طرفى كل من المعادلتين فى مكرر المجهول المراد حذفه تصيير المعادلتين محتويتين على هذا المجهول بمكرر واحد ويمكن الوصول الى ذلك بطريقة مختصرة عندما يكون لمكررى هذا المجهول مضروب مشترك فاذا فرض أن المراد حذف ص من المعادلتين

٥ س + ٦ ص = ٢٨ و

٧ س + ٨ ص = ٣٨

فالمكرران ٦ و ٨ حيث أن لهما مضروبا مشتركا يبحث عن المقسوم الاصغر لهما فيوجد ٢٤ وحينئذ يسهل تحويل المعادلتين لتصيرا محتويتين على المجهول ص بمكرر ٢٤ بضرب طرفى المعادلة الاولى فى ٤ الذى هو خارج قسمة ٢٤ على ٦ ثم ضرب طرفى المعادلة الثانية فى ٣ الذى هو خارج قسمة ٢٤ على ٨ فيحدث

٢٠ س + ٢٤ ص = ١١٢ و

٢١ س + ٢٤ ص = ١١٤

وهذه الكيفية المختصرة هى المشاهدة فى علم الحساب فى كيفية تحويل الكسور الى كسور اخصر مقاما مشتركا

فالقاعدة التى يراد سلوكها هنا عين التى هنالك

الطريقة الرابعة طريقة المكررات غير المعينة

فاذا فرضت معادلتان ٥ س + ٦ ص = ٢٨ و ٧ س + ٨ ص = ٣٨ تضرب حدود المعادلة الاولى فى م ثم تجمع الثانية اليها طرفا الى طرف فيحدث

٥ م س + ٧ س + ٦ م ص + ٨ ص = ٢٨ م + ٣٨

ثم يوضع س و ص مضروبين مشتركين فى الحدود المشتملة عليهما فيتحصل

(٥ م + ٧) س + (٦ م + ٨) ص = ٢٨ م + ٣٨

وانما لم نعين كمية م لاجل حذف احد المجهولين فاذا اريد حذف صـ مثلا يسوى مكرره بصفر هكذا

٦م + ٨ = ٠ ومنه يستخرج م = − $\frac{٨}{٦}$ = − $\frac{٤}{٣}$ ثم تستعوض كميتا م و ٦ م + ٨ فى معادلة (٥ م + ٧) سـ + (٦ م + ٨) صـ = ٢٨ م + ٣٨ بالمقدارين − $\frac{٤}{٣}$ وصفر وبهذا تؤل الى (− $\frac{٢٠}{٣}$ + ٧) سـ = − $\frac{١١٢}{٣}$ + ٣٨

فاذن يكون المجهول صـ قد انحذف

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة المكررات غير المعينة ان تضرب احدى المعادلتين فى كمية ما غير معينة ثم يجمع الناتج الى المعادلة الاخرى طرفا الى طرف ثم يوضع كل مجهول مضروبا مشتركا فى الحدود المشتملة عليه ثم يسوى مكرر المجهول المراد حذفه بصفر فيصير محذوفا ثم تستعوض الكمية غير المعينة بمقدارها المستخرج من الفرض المتقدم

(تنبيه)

اسهل الطرق الاربعة فى العمل طريقة الجمع أو الطرح لانها لاتحدث مقاما فى المعادلة الناتجة من الحذف غير أن طريقة الوضع تستعمل بكثرة عند ما يكون مكرر المجهول المراد حذفه مساويا للواحد فى احدى المعادلتين ذاتى المجهولين

(٣٧) لحل معادلتين ذاتى مجهولين ودرجة اولى كمعادلتى

٧ سـ − ٨ صـ = ٥ و ٥ سـ − ١٢ صـ = − ٩ يحذف المجهول صـ بضرب المعادلة الاولى فى ٣ والثانية فى ٢ ثم تطرح الثانية من الاولى فيحدث

١١ سـ = ٣٣ ومنها يستخرج سـ = $\frac{٣٣}{١١}$ = ٣

ولاستخراج مقدار المجهول صـ يوضع مقدار المجهول سـ بدله فى احدى المعادلتين فيوضع فى الاولى مثلا مقدار سـ بدله فتصير

٢١ ــ ٨ صـ = ٥ ومنها يحدث صـ = $\frac{٢١-٥}{٨}$ = ٢

فالقاعدة العمومية لحل معادلتين ذاتى مجهولين ودرجة اولى أن يحذف احد المجهولين منهما فتنتج معادلة ذات مجهول واحد يستخرج منها مقدار هذا المجهول ثم يوضع مقداره بدله فى احدى المعادلتين فتؤول الى معادلة محتوية على المجهول الثانى ثم يستخرج منها مقداره

(٣٨) وبمقتضى ما ذكر يسهل حل ثلاث معادلات كل منها ذات ثلاثة مجاهيل فاذا فرض مثلا

٥ سـ ــ ٨ صـ + ٣ ع = ــ١٩ و

٢ سـ + ٣ صـ ــ ٦ ع = ٩ و

٧ سـ ــ ٢ صـ ــ ٢ ع = ٧

يحذف ع من المعادلة الاولى والثانية بضرب الاولى فى ٢ ثم ضم الناتج الى الثانية فيحدث

١٢ سـ ــ ١٣ صـ = ــ ٢٩ (١)

ثم يحذف ع من المعادلة الثانية والثالثة بضرب الثالثة فى ٣ ثم طرح الثانية من الحاصل فيحدث

١٩ سـ ــ ٩ صـ = ١٢ (٢)

ثم يحذف المجهول صـ من المعادلتين (١) و(٢) ذاتى الدرجة الاولى والمجهولين بأن تضرب الاولى فى ٩ والثانية فى ١٣ ثم تطرح الاولى من الثانية فيحدث

١٣٩ سـ = ٤١٧ ومنها يحدث سـ = $\frac{٤١٧}{١٣٩}$ = ٣

ثم يستخرج مقدار المجهول صـ بوضع مقدار سـ عوضا عنه فى احدى المعادلتين (١) و (٢) فيحدث

٣٦ ــ ١٣ صـ = ــ ٢٩ ومنها ينتج

صـ = $\frac{٢٩+٣٦}{١٣}$ = ٥

ثم لاستخراج مقدار ع يوضع فى احدى المعادلات الثلاث المشتملة كل منها

على الثلاثة مجاهيل مقدار المجهول س ومقدار المجهول ص بدلهما فتؤول المعادلة المذكورة الى معادلة محتوية على المجهول ع فقط فاذا وضع مثلا بدل س و ص مقداراهما فى المعادلة الثالثة آلت الى ٢١ — ١٠ — ٢ع = ٧ ومنها يحدث ع = $\frac{٢١-١٠-٧}{٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ فالقاعدة العمومية لحل ثلاث معادلات كلاها ذات ثلاثة مجاهيل ودرجة اولى ان يحذف احد المجاهيل من احدى المعادلات مع كل من المعادلتين الاخريين على التوالى فيتوصل الى معادلتين كلاهما ذات مجهولين ثم يحذف المجهول الثانى من هاتين المعادلتين فتحصل معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج مقداره منها ويوضع فى احدى المعادلتين ذاتى المجهولين ثم يستخرج مقدار المجهول الثانى ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين المستخرجين فى احدى المعادلات ذوات الثلاثة مجاهيل ثم يستخرج مقدار المجهول الثالث منها

(٣٩) فبناء على هذه القاعدة يمكن التوصل الى القاعدة التى بها تحل اربع معادلات كلاها ذات اربعة مجاهيل وخمس معادلات كلاها ذات خمسة مجاهيل وهكذا لان العمل واحد فاذن ينتج قاعدة عمومية نذكرها فنقول

(قاعدة عمومية)

لحل جملة معادلات عددها م محتوية على مجاهيل عددها م ايضا يحذف احد المجاهيل من المعادلة الاولى مع كل من المعادلات الاخر التى عددها م — ١ على التوالى فتنتج جملة معادلات عددها م — ١ وهو عين عدد مجاهيلها ثم يحذف مجهول ثان من احدى المعادلات التى عددها م — ١ مع كل من المعادلات التى عددها م — ٢ على التوالى فتنتج جملة معادلات عددها م — ٢ وهو عين عدد مجاهيلها وهكذا يكون العمل الى أن يتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره ويوضع فى احدى المعادلتين المحتويتين على المجهولين الناتجين من العمل لاستخراج المجهول الثانى ثم توضع مقادير المجاهيل التى عينت فى المعادلات السابقة الناتجة من العمل لاستخراج باقى المجاهيل الاخر الى أن يتوصل الى احدى المعادلات

التى عدد مجاهيلها م وهو عين عددها فتكون قد استخرجت مقادير المجاهيل على التوالى

(٤٠) قد فرضنا فى البحث عن قاعدة حل معادلتين ذاتى مجهولين ان كانتهما بهذه الصورة ح س + ء ص = هـ اعنى أن كلتيهما لا تحتوى الا على ثلاثة حدود صحيحة احدها مشتمل على س والثانى على ص والثالث على المعلوم وأن الحد المعلوم فى الطرف الثانى والحدين الآخرين فى الطرف الاول فاذا كانت صورة المعادلتين متشعبة وجب حينئذ تحويلها الى الصورة البسيطة المتقدمة فيجب

اولا اجراء عمليات الضرب الموجودة بها وحذف المقامات

وثانيا تحويل الحدود المشتملة على المجهولين الى الطرف الاول والحدود المعلومة الى الطرف الثانى

وثالثا اختصار حدود س وحدود ص أو وضع س و ص مضروبين مشتركين فى الحدود المشتملة عليهما ومثل ذلك يجرى على جملة المعادلات ذوات المجاهيل الثلاثة أو الاربعة أو الخمسة وهلم جرا

(٤١) قد فرضنا فى المعادلات التى حلت أن جميع المجاهيل داخلة فى كل منها فان لم يكن جميعها داخلا فى كل منها سميت معادلات غير تامة وحلها كحل المعادلات التامة غير انه يجب الانتباه فى انتخاب المجاهيل التى يراد حذفها ليتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فى اقرب وقت وللحصول على ذلك يحذف المجهول الداخل فى المعادلات بأقل عدد فعادلات

٢ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٠ و

٥ س − ٣ ع = ١٢ و

٢ ص + ٣ ر = ١٩ و

٣ س − ٤ ص − ٢ ع + ٢ ر = ٩

مثلا يشاهد أن المجهول ر داخل فيها بعدد اقل من غيره فيجب حذف هذا المجهول من هذه المعادلات بان يحذف من المعادلتين الاخيرتين

المحتوىتين عليه لتحدث معادلة مجردة منه فاذا ضمت هـذه المعادلة الى المعادلتين الاولين يحدث ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هى

٢ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٠ و

٥ س − ٣ ع = ١٢ و

٩ س − ١٦ ص − ٦ ع = − ١١

وحيث أن المجهول ص داخل فى هـذه المعادلات بعدد اقل من غيره يحذف من المعادلة الاولى والثالثة ليتكون من حذفه معادلة مشتملة على مجهولين هما المجهولان الموجودان فى الثانية وبكتابتها مع الثانية يحدث

٥ س − ٣ ع = ١٢ و

٥٩ س − ٥٠ ع = ١٢٧ و

فاذا حذف ع منهما يحدث ٧٣ س = ٢١٩،

ومنها يحدث س = ٣

وبالوضع يحدث على التوالى ص = ٢ و ع = ١ و ر = ٥

(٤٢) قد يكون عدد المعادلات فى حل جملة معادلات ذات درجة اولى وجملة مجاهيل قدر عدد المجاهيل كما تقدم فى جميع جمل المعادلات التى حلت وقد يكون عدد المعادلات ازيد من عدد المجاهيل

وقد يكون عدد المجاهيل ازيد من عدد المعادلات فهذه ثلاث حالات

الحالة الاولى اذا كان عدد المعادلات ذات الدرجة الاولى قدر عدد المجاهيل الداخلة فيها بان كان الاول م والثانى م كانت ممكنة الحل على العموم ومنتهية اعنى انها تحقق بجملة واحدة من مقادير المجاهيل المنحصرة فيها

لانه اذا سلكت الطريقة المبينة فى (٣٩) لحل جملة معادلات توصل الى معادلة ذات مجهول واحد هكذا

ح س = ء ومنها يستخرج س = ء/ح فاذا وضع هذا المقدار فى احدى المعادلتين ذاتى المجهولين حدث مقدار للمجهول الثانى المنحصر فى هـذه

المعادلة

المعادلة ومثل ذلك يجرى فى جميع مجاهيل الجمل الحادثة من الاوضاع المتوالية

وقد يتوصل بعد عملية الحذف على التوالى الى معادلة انتهائية هكذا $س \times ٠ = د$ أو $٠ = د$ وهى معادلة فاسدة تدل على أن الجملة المفروضة غير ممكنة الحل أعنى انه لايمكن تحقيقها بجملة ما المقادير المجاهيل المنحصرة فيها وذلك انما يقع عندما تكون هذه الجملة محتوية على معادلات متخالفة .

وقد يتوصل بعد الحذف على التوالى الى معادلة انتهائية هكذا $٠ \times س = ٠$ أو $٠ = ٠$ فتكون جملة المعادلات غير معينة الحل اعنى انه يمكن تحقيقها بجمل لانهائية العدد من المقادير للمجاهيل المنحصرة فيها وانما يقع ذلك اذا كان بين بعض معادلات من الجملة تداخل به يكون عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل .

الحالة الثانية اذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد المجاهيل المنحصرة فيها بان كان عدد الاولى $م + ن$ وعدد الثانية $م$ فالجملة تكون على العموم غير ممكنة الحل لانه اذا أخذ منها معادلات عددها $م$ وكان لايوجد الاجملة واحدة من مقادير المجاهيل المنحصرة فيها التى عددها $م$ ووضعت هذه المقادير فى المعادلات الباقية التى عددها $ن$ ولم تطابق تكون الجملة المفروضة غير ممكنة التحقق

وقد يوجد تداخل بين بعض معادلات الجملة المفروضة مع كون عدد المعادلات المتحققة وهو $م$ عين عدد المجاهيل الداخلة فيها فحينئذ تكون الجملة المذكورة ممكنة الحل ومعينة فان كان عدد المعادلات المتحققة اقل من $م$ أى من عدد المعادلات المفروضة فالجملة المذكورة تكون غير معينة الحل

الحالة الثالثة اذا كانت المعادلات اقل من المجاهيل الداخلة فيها بان كان عدد الاولى $م$ وعدد الثانية $م + ن$ كانت الجملة على العموم غير معينة الحل لانه يتوصل بعد الحذف المتوالى الى معادلة مشتملة على

مجاهيل عددها ن + ١ وهذه المعادلة تتحقق بجمل لانهائية العدد من المقادير فاذا وضع أحد هذه الجمل فى احدى المعادلتين المشتملتين على مجاهيل عددها ن + ٢ يحدث مقدار مطابق للمجهول الباقى فى هذه المعادلة فاذن يكون لهذا المجهول مقادير غير معينة ايضا ومثل ذلك يشاهد فى جميع المجاهيل الاخرى اى انه يكون لها مقادير عددها لانهائى ومع ذلك فالجملة تكون غير ممكنة الحل اذا وجد فى المعادلات التى عددها م وعدد مجاهيلها م + ن معادلتان أو ثلاث متخالفة

امثلة ذلك

المثال الاول أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٢ س + ص − ٨ ع = ١٠ و

٦ س − ٤ ص + ١٠ ع = ٢٧

ثم يحذف المجهول ص من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة فيوجد ٧ س − ١١ ع = ٣٤ و ٠ = ١ فالمعادلة الفاسدة التى هى ٠ = ١ تبين ان المعادلة الاولى والثالثة الحادثة منهما هذه المعادلة متخالفتان ويفهم ذلك من أول وهلة لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من المعادلة الاولى الذى هو ٣ س − ٢ ص + ٥ ع والطرف الثانى منها ليس ضعف الطرف الثانى من الاولى الذى هو ١٤ وهذا ناشئ من فساد المعادلات الاصلية

المثال الثانى ان تفرض ثلاث معادلات هكذا

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٢ س + ص − ٨ ع = ١٠ و

٦ س − ٤ ص + ١٠ ع = ٢٨

ثم يحذف ص من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة فيحدث

٧ س — ١١ ع = ٣٤ و ٠ = ٠

فيظهر من المطابقة ٠ = ٠ أن المعادلة الاولى والثالثة متداخلتان لان المعادلة الثالثة تحدث من ضرب طرفى المعادلة الاولى فى ٣ فالجملة المعلومة لاتبين الا المعادلتين

٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٧ س — ١١ ع = ٣٤

فيستخرج من المعادلة الاخيرة س = (٣٤ + ١١ ع) / ٧ وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الاولى يحدث

ص = (٤ + ٦٨ ع) / ١٤ او ص = (٢ + ٣٤ ع) / ٧

وهذان المقداران يطابقان اى مقدار فرض للمجهول ع ومقادير س و ص و ع المتطابقة تحقق المعادلات المعلومة ولذا يكون حل المعادلات غير معين

المثال الثالث اذا فرض

٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٦ س — ٤ ص + ١٠ ع = ٢٨ و

٩ س — ٦ ص + ١٥ ع = ٤٢

ثم حذف المجهول ع من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة حدث متطابقتان وهذا يدل على ان الجملة المعلومة تؤل الى معادلة واحدة هى ٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ لان المعادلة الثانية ناتجة من ضرب المعادلة الاولى فى ٢ والثالثة من ضربها فى ٣ فاذا استخرج مقدار س من المعادلة ٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ يحدث س = (١٤ + ٢ ص — ٥ ع) / ٣ واذا فرضت مقادير للمجهولين ص و ع حدث مقدار للمجهول س وجميع هذه المقادير تحقق المعادلات الاصلية

المثال الرابع اذا فرض

٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٢ س + ص — ٨ ع = ١٠ و

٨ س — ٣ ص + ٢ ع = ٣٥

ثم حذف ص من الاولى والثانية ثم من الثانية والثالثة تحدث هاتان المعادلتان ٧ س — ١١ ع = ٣٤ و ١٤ س — ٢٢ ع = ٦٥

وهاتان المعادلتان متخالفتان فلو تداخلتا فى بعضهما لحدث معادلة فاسدة هى ٣ = ٠ وفهم من ذلك ان المعادلات الاصلية متخالفة ايضا لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من الاولى مضموما اليه الطرف الاول من المعادلة الثانية لكن الطرف الثانى من المعادلة الثالثة ليس مساويا لضعف الطرف الثانى من المعادلة الاولى مضافا الى الطرف الثانى من المعادلة الثانية

المثال الخامس اذا فرضنا

٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٢ س + ص — ٨ ع = ١٠ و

٨ س — ٣ ص + ٢ ع = ٣٨

يحدث بحذف ص منها معادلتان

٧ س — ١١ ع = ٣٤ و ٧ س — ١١ ع = ٣٤

وحيث أن هاتين المعادلتين متطابقتان يفهم من ذلك انه يجب استعمال المعادلتين ٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و ٧ س — ١١ ع = ٣٤ المشروحتين سابقا فى المثال الثانى

وعدم انتهاء الجملة المعلومة حادث من كون المعادلة الثالثة مركبة من ضم ضعف طرفى المعادلة الاولى الى طرفى المعادلة الثانية

المثال السادس اذا فرضنا

٣ س — ٢ ص + ٥ ع = ١٤ و

٦ س — ٤ ص — ٣ ع = ١٥ و

٩ س — ٦ ص — ٧ ع = ٣٠

حدث

يحدث بحذف ص منهما معادلتان ١٣ ع = ١٣ و ٢٢ ع = ٢٢

ومنهما يحدث ع = ١

ولا يجرى العمل الا على هذه المعادلة وأحدى المعادلات المفروضة الآيلتين الى المعادلتين ع = ١ و ٣ س ـ ٢ ص = ٩ فاذن يكون الحل غير معين نظرا الى المجاهيل س و ص و ع الذى ليس له الا مقدار واحد محدود

(مسائل من الدرجة الاولى)

(٤٣) حل المسئلة الجبرية يتركب من جزئين متغايرين احدهما وضع المسئلة بصورة معادلة تدل بطريق الاختصار على الارتباطات الكائنة بين الكميات المعلومة والمجهولة كدلالة منطوق المسئلة والثانى حل المعادلة أو المعادلات الناتجة من الوضع المذكور

والجزء الثانى من هذين الجزئين مؤسس على قواعد مطردة تقدم ذكرها فى الحالة التى تكون فيها المعادلات ذات درجة اولى واما وضع المسئلة بصورة معادلة فغير مؤسس على قواعد مطردة الا انى اذكر قاعدة عامة بها يتوصل الى وضعها بصورة معادلة وان كان تطبيق تلك القاعدة يعسر فى بعض الاحيان فاقول

(قاعدة عامة)

يجب لوضع مسئلة بصورة معادلة بعد الرمز لمجاهيلها بحروف أن تبين بواسطة العلامات الجبرية العمليات التى يلزم اجراؤها على الكميات المجهولة باعتبارها معلومة لتحقيق شروط منطوق المسئلة ولنطبق هذه القاعدة على حل مسائل فنقول

(المسئلة الاولى)

(٤٤) رجل اوصى قبل موته بان نصف تركته لولده وثلثها لبنته وباقيها وهو ١٢٠٠٠ غرش للفقراء والمراد معرفة مقدار تركته غروشا وما يخص كل وارث منها

فحل ذلك أن يفرض س رمزا للتركة ومقتضى منطوق المسئلة أن تكون التركة مساوية لما يخص الولد زائدا ما يخص البنت زائدا ١٢٠٠٠ غرش أى

$$\frac{س}{٢} + \frac{س}{٣} + ١٢٠٠٠ = س$$

ثم تجرى قاعدة الحل المعلومة على هذه المعادلة فيحدث

$$٣س + ٢س + ٧٢٠٠٠ = ٦س \quad \text{اى}$$

$$٣س + ٢س - ٦س = -٧٢٠٠٠ \quad \text{اى}$$

$$-س = -٧٢٠٠٠ \quad \text{اى}$$

$$س = ٧٢٠٠٠$$

فمقدار تركته ٧٢٠٠٠ غرش يخص الولد منها النصف وهو ٣٦٠٠٠ غرش والبنت الثلث وهو ٢٤٠٠٠ غرش والفقراء الباقى وهو ١٢٠٠٠ غرش

(المسئلة الثانية)

(٤٥) ماهو العدد اللازم ضمه لحدى الكسر $\frac{ح}{ء}$ ليكون الناتج مساويا لكمية معلومة م

حل ذلك ان يفرض أن س العدد المطلوب فيكون بالضرورة

$\frac{ح + س}{ء + س} = م$ ثم يجرى حل هذه المعادلة بالقاعدة المعتادة فيحدث

$$ح + س = م ء + م س \quad \text{ثم}$$

$$س - م س = م ء - ح \quad \text{ثم}$$

$$س(١ - م) = م ء - ح \quad \text{ثم}$$

$$س = \frac{م ء - ح}{١ - م}$$

(مناقشة)

مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل اليها الحل بواسطة الفروض المختلفة الجارية على المعاليم

فلاختبار

"فلاختبار ما يؤل اليه الناتج $\frac{ح-م}{١-م}$ تفرض فروض مختلفة فيه على المعاليم $\frac{ح}{ى}$ و م فيقال

اولا اذا فرض $\frac{ح}{ى} = \frac{٤}{٧}$ و م $= \frac{٢}{٣}$ بان جعل ح = ٤ و ى = ٧ و م $= \frac{٢}{٣}$ فى مقدار س يؤل ذلك المقدار الى

$$س = \frac{٧ \times \frac{٢}{٣} - ٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{١٤}{٣} - ٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{١}{٣}} = ٢$$ فحينئذ س = ٢

لانه اذا ضم العدد ٢ الى حدى الكسر $\frac{٤}{٧}$ يصير $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ وهذا ناتج لا اشكال فيه لموافقته لمنطوق المسالة

وثانيا اذا فرض أن $\frac{ح}{ى} = \frac{٥}{٨}$ و م $= \frac{١}{٢}$ أى م $= \frac{١}{٢}$ و ح = ٥ و ى = ٨ فى مقدار س يؤل ذلك المقدار الى

$$س = \frac{\frac{١}{٢} \times ٨ - ٥}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{٤ - ٥}{\frac{١}{٢}} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}} = -٢$$

فحينئذ مقدار س = -٢ هو ما يسمى بالحل السالب ووجه كونه سالبا انك اذا تأملت فى منطوق المسئلة شاهدت انها غير ممكنة الحل لان كسر $\frac{٥}{٨}$ أكبر من $\frac{١}{٢}$ واذا ضم عدد واحد الى حدى الكسر المذكور ازداد هذا الكسر فاذن لا يمكن اضافة عدد واحد الى حدى الكسر $\frac{٥}{٨}$ ليكون الناتج مساويا للكسر $\frac{١}{٢}$ الاصغر منه فعلى هذا يكون الحل السالب س = -٢ للمسئلة الجارى مناقشتها دالا على استحالة حل المسئلة فى الحالة المذكورة فينبغى حينئذ لتصليح منطوق المسئلة أن تغير فى المعادلة العمومية التى هى $\frac{ح+س}{ى+س} = م$ علامة س فتصير $\frac{ح-س}{ى-س} = م$ فحينئذ يكون منطوقها

ماهو العدد الذى يلزم طرحه من حدى الكسر $\frac{ح}{ى}$ ليصير الناتج مساويا م وهو منطوق لا يختلف عن المنطوق الاصلى الا بتغيير كلمة ضم بكلمة طرح فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل ويكون لها حل عين الحل المتقدم بقطع النظر عن العلامة لانه اذا حلت المعادلة $\frac{ح-س}{ى-س} = م$ يحدث

$\text{س} = \frac{\text{ء م} - \text{ح}}{\text{م} - ١}$ واذا فرض فى هذا المقدار أن $\text{م} = \frac{١}{٢}$ و $\text{ء} = ٨$
و $\text{ح} = ٥$ يحدث $\text{س} = ٢$

وثالثا اذا فرض أن $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{٥}{٩}$ و $\text{م} = ١$ بأن جعل $\text{م} = ١$
و $\text{ح} = ٥$ و $\text{ء} = ٩$ فى مقدار س آل الى
$\text{س} = \frac{٩ - ٥}{١ - ١} = \frac{٤}{٠}$

ولايضاح هذا الناتج يقال من المعلوم أن الكسر يزداد متى نقص مقامه فاذا صغر المقام الى غير نهاية أو ساوى صفرا كبر الكسر كذلك فاذن يكون للمجهول س مقدارا غير منتهه فى الكبر أعنى مقدار لا يحد ابدا فالمسئلة تكون ايضا غير ممكنة الحل لانه اذا تأمل فى منطوق المسئلة شوهد أن الكسر اذا ضم لحديه عدد بالغا ما بلغ يزداد به غير أنه لايصير ابدا مساويا للواحد لان فروق حديه واحدة دائما فحينئذ يكون أى مقدار بهذه الصورة $\frac{\text{ح}}{٠}$ و $\frac{١}{٠}$ و $\frac{٥}{٠}$ دالا على استحالة حل المسئلة

(تنبيه)

كل عدد غير محدود يمكن بيانه بالكسر $\frac{\text{ح}}{٠}$ أو $\frac{١}{٠}$ أو بعلامة ∞

ورابعا اذا فرض $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{٥}{٥}$ و $\text{م} = ١$ بأن جعل $\text{م} = ١$
و $\text{ح} = ٥$ و $\text{ء} = ٥$ فى مقدار س ال ذلك المقدار الى
$\text{س} = \frac{٥ - ٥}{١ - ١} = \frac{٠}{٠}$ ولتوضيح مقدار $\text{س} = \frac{٠}{٠}$ يقال أن مقدار س يكون مساويا لخارج قسمة صفر على صفر أى مساويا لعدد اذا ضرب فى صفر انتج صفرا وحيث أن جميع الاعداد المحدودة المضروبة فى صفر تحدث صفرا يمكن اعطاء س أى مقدار رقمى وبهذا تكون المسئلة غير معينة الحل لانه اذا تؤمل فى منطوق المسئلة يشاهد ان تساوى حدى الكسر $\frac{٥}{٥}$ لا يتغير بضم أى عدد اليهما فحينئذ يكون الناتج مساويا للواحد دائما وينتج من ذلك أن أى مقدار بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ يدل على أن المسئلة غير معينة الحل

(المسئلة الثالثة)

(٤٦) ساعيان ابتدأ السير من نقطتى ا و ب على مستقيم اب من الشمال الى اليمين وكان الساعى المبتدء من ب متقدما عن الآخر بالمسافة اب المرموز لها بالحرف د وسرعته ن وسرعة الآخر م والمراد تعيين نقطتى وضعهما حين يكون بينهما مسافة من امتداد اب مساوية للبعد دَ (والمراد بسرعة الساعيين المبينة بالرمزين م و ن البعدان اللذان يقطعهما الساعيان فى وحدة الزمن)

فيرمز بالحرفين آ و بَ لوضعى الساعيين حين يكون البعد الحادث بينهما مساويا للكمية دَ ثم يرمز بالحرف س للبعد المجهول الذى هو ا آ فالبعد ب بَ المساوى ا آ — ا ب + آ بَ يكون مبينا بالمقدار س — د + دَ

وحيث ان الزمن الذى استغرقه الساعى المبتدء من ا فى قطع البعد س عين الزمن الذى استغرقه الآخر المبتدء من ب فى قطع البعد س — د + دَ يبحث عن كل من هذين الزمنين فيقال حيث ان الساعى الاول قطع البعد م فى وحدة الزمن يقطع وحدة البعد فى الزمن $\frac{١}{م}$ ويقطع البعد س فى الزمن $\frac{س}{م}$ ومثل ذلك الساعى الثانى فانه يقطع البعد س — د + دَ فى زمن مبين بالمقدار $\frac{س - د + دَ}{ن}$ فاذن تحدث هذه المعادلة

$$\frac{س}{م} = \frac{س - د + دَ}{ن}$$ ومنها يحدث

$$ن س = م س - م د + م دَ$$ أو

$$م س - ن س = م د - م دَ$$ أو

$$س (م - ن) = م (د - دَ)$$ ومنها ينتج

$$س = \frac{م (د - دَ)}{م - ن}$$

فحينئذ يكون $س$ الذى هو عبارة عن البعد اأَ مساويا $\frac{م(ء - ءَ)}{م - ن}$

واذا رمز للبعد ب بَ بالحرف $ص$ يكون $ص = \frac{م(ء - ءَ)}{م - ن} - ء + ءَ$

$= \frac{ءم - ءَم - ءم + ءَم + ءن - ءَن}{م - ن} = \frac{ءن - ءَن}{م - ن} = \frac{ن(ء - ءَ)}{م - ن}$

(مناقشة احوال المسئلة)

الحالة الاولى اذا فرض أن $ء = ٠$ و $م > ن$ حدث

$$س = \frac{-ءَم}{م - ن} \quad و \quad ص = \frac{-ءَن}{م - ن}$$

فيكون مقدار $س$ ومقدار $ص$ سالبين لان البسطين سالبان والمقام المشترك موجب لان $م$ فيه اكبر من $ن$

ولنختبر كما فى المسئلة السابقة هل هذان المقداران يدلان على أن المسئلة ممكنة الحل فنقول

قد فرضنا فى هذه ان الساعيين قد ذهبا من نقطة واحدة بدليل أن $ء = ٠$ ومن حيث ان سرعتيهما مختلفة بدليل ان $م > ن$ يوجد لحظة فيها البعد الفارق بينهما مساو للكمية $ءَ$ فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل

فحينئذ لا تكون المقادير السالبة ناشئة من عدم امكانية المسئلة وانما هى ناشئة من فساد فرض اجرى فى وضع المسئلة على صورة معادلة لانه قد فرض ان الساعى الذاهب من ا باق خلف الآخر مع أن الموضوع فى هذه الحالة انهما ذهبا من نقطة واحدة وان سير الساعى ا أسرع من سير الآخر ب فاذن لا يكون خلفه أبدا فلا يكون موضعا أَ و بَ المفروضين عند وضع المسئلة على صورة معادلة الموضعين الحقيقيين

فيجب لحل هذه المسئلة ووضعها على صورة معادلة أن يجعل للساعيين المحلين الحقيقيين المشغولين بهما أى أن يفرض أن أَ على يمين نقطة بَ فيكون البعد اأَ مبينا بالحرف $س$ والبعد ب بَ مساويا $س - ء - ءَ$

فتصير المعادلة هكذا

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{\text{س} - \text{ء} - \text{ءَ}}{\text{ن}}$$ ومنها يستخرج

$$\text{س} = \frac{\text{م}(\text{ء} + \text{ءَ})}{\text{م} - \text{ن}}$$ وبناء على ذلك يكون

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}(\text{ء} + \text{ءَ})}{\text{م} - \text{ن}}$$

فاذا فرض فى هذين المقدارين ان $\text{ء} = ٠$ و $\text{م} > \text{ن}$ وهو عين الفرض الذى حدث منه المقداران السالبان المتقدمان آلا الى $\text{س} = \frac{\text{ءَ}\text{م}}{\text{م} - \text{ن}}$ و $\text{س} = \frac{\text{ءَ}\text{ن}}{\text{م} - \text{ن}}$

وهما مقداران موجبان متحدان فى المقدار المجرّد مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدم فحينئذ يكون المقدار السالب ناتجا بعض الاحيان من فرض فاسد اجرى فى وضع المسئلة على صورة معادلة

الحالة الثانية اذا فرض أن $\text{ءَ} = ٠$ و $\text{م} > \text{ن}$ آل المقداران العموميان الى

$$\text{س} = \frac{\text{ء}\text{م}}{\text{م} - \text{ن}} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{\text{ء}\text{ن}}{\text{م} - \text{ن}}$$

ومن حيث أن $\text{م} > \text{ن}$ يكون هذان المقداران موجبين لان بسطيهما موجبان ومقاميهما كذلك

فاذا تؤمل فى منطوق المسئلة شوهد أنها ممكنة الحل لانه بفرض ءَ صفرا يظهر أن المطلوب تعيين النقطة التى يلحق فيها الساعى ا الساعى ب وان لحوقه به يكون محققا حيث فرضت سرعته أكبر من سرعة الساعى ب فحينئذ يكون المقداران الموجبان المتقدمان دالين على امكانية المسئلة

الحالة الثالثة اذا فرض أن $\text{ءَ} = ٠$ و $\text{م} < \text{ن}$ ال المقداران العموميان الى

$$س = \frac{دم}{م - ن} \quad و \quad ص = \frac{دن}{م - ن}$$

وهما مقداران سالبان لان البسطين موجبان والمقامين سالبان (حيث كان $م > ن$) وليسا ناتجين من فساد الغرض فى وضع المسئلة على صورة معادلة لان الحالة الخصوصية التى نحن بصددها لاتحتوى على فرض مشكوك فيه حيث كان المطلوب تعيين النقطة التى يلحق فيها الساعى ب الساعى ا وانما يكون الحلان السالبان ناتجين من اختلال أحد شروط منطوق المسئلة لان سرعة الساعى ا مفروضة اقل من سرعة الساعى ب بدليل أن $م > ن$ فاذن لايمكن أن يلحق الساعى ا الساعى ب

ولتصلح منطوق المسئلة يفرض فى المعادلة $\frac{س}{م} = \frac{س - د + دَ}{ن}$ أن $دَ = ٠$ ثم تغير علامة س وبه تؤول الى $\frac{-س}{م} = \frac{-س - د}{ن}$ وبتغيير علامة الطرفين يحدث $\frac{س}{م} = \frac{س + د}{ن}$ ولتحويل هذه المعادلة الى منطوق مسئلة يلاحظ أن $\frac{س}{م}$ هو الزمن الذى استغرقه الساعى ا ليقطع البعد س وأن $\frac{س + د}{ن}$ هو الزمن الذى استغرقه الساعى ب ليقطع البعد $س + د$ وحيث أن المسافة التى قطعها الساعى ا ليصل لنقطة التلاقى مع الساعى ب اصغر من المسافة الذى قطعها الساعى ب تكون نقطة التقابل على شمال النقطة ا فمعادلة $\frac{س}{م} = \frac{س + د}{ن}$ تتحول الى منطوق لاتى هو

بَ ــــــــــ ا ــــــ ب

ساعيان ابتدأ فى السير على خط ا ب من نقطتين ا و ب وسيرهما من اليمين الى الشمال لكن الساعى ا سابق للساعى ب بالبعد د وسرعة الاول م والآخر ن والمطلوب تعيين النقطة بَ من امتداد ا ب التى يلحق فيها الساعى ب الساعى ا

فاذا حلت المعادلة $\frac{س}{م} = \frac{س + د}{ن}$ على اسلوب ما تقدم يوجد للبعدين ابَ و بَ ب أى س و $س + د$ أو ص المقداران

$-س = \frac{ءم}{ن}$ و $-ص = \frac{ءن}{م}$

الموجبان والمحدان في المقدار المجرّد مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدّم

الحالة الرابعة اذا فرض أن $ءَ = ٠$ و $م = ن$ فالمقداران العموميان يؤلان الى

$س = \frac{ءم}{ب}$ و $ص = \frac{ءن}{ب}$

وهما مقداران غير محدودين فالمسئلة تكون حينئذ غير ممكنة الحل لان سرعة الساعيين واحدة فالبعد الفارق بينهما لا يصير مساويا للصفر أبدا

الحالة الخامسة اذا فرض أن $ءَ = ٠$ و $ء = ٠$ و $م = ن$ فالمقداران العموميان يؤلان الى

$س = \frac{٠}{٠}$ و $ص = \frac{٠}{٠}$

وحيث أن هذين المقدارين غير معينين يمكن اعطاء المجهولين جميع المقادير الممكنة وهو يوافق منطوق المسئلة لان الساعيين خرجا من نقطة واحدة بدليل أن $ء = ٠$ ولا يفترقان بدليل أن $م = ن$ فاذن يكون $ءَ = ٠$ في جميع نقط الخط اب

(انواع ناتجة من مناقشة المسائل التى بدرجة اولى)

(٤٧) قد نتج من مناقشة المسئلتين المتقدمتين أربعة أنواع من المقادير النوع الاوّل المقادير الموجبة والثانى المقادير السالبة والثالث المقادير التى بهذه الصورة $\frac{ح}{٠}$ والرابع المقادير التى بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$

فأما المقادير الموجبة فانها تدل على امكان حل المسئلة الا فى مسائل احتيج فيها الى أن يكون مقدار المجهول عددا صحيحا ووجد مقداره كسرا موجبا فانها غير ممكنة الحل وذلك كالمسئلة التى يراد فيها تعيين اساس جملة تعداديه واما المقادير السالبة فانها تحدث من الفروض الفاسدة الكائنة فى وضع

المسئلة على صورة معادلة أو من الخلل فى معنى احد شروط منطوق المسئلة

ومتى نتج للمجهول مقدار سالب وجب اولا اختبار وضع المسئلة على صورة معادلة هل فيه فرض يشك فى معناه فان كان فيه ذلك غير معنى هذا الفرض ثم تحل المسئلة الجديدة الناتجة منه فان لم يكن فيه فرض يشك فيه اوكان واصلح لكن وجد مقدار سالب أو جملة مقادير للمجاهيل تحقق بالضرورة عدم امكانية بعض شروط منطوق المسئلة فاذا التصليح هذا المنطوق فى المعادلة أو المعادلات التى حلت تغير علامات المجهول او المجاهيل التى وجدت لها مقادير سالبة ثم تحول المعادلات الجديدة الى عبارة قريبة المنطوق ما امكن من المنطوق الاصلى فينتج من ذلك مسئلة جديدة ممكنة الحل غير مخالفة للاولى الا فى معنى بعض شروط المنطوق ومقادير مجاهيلها موجبة ومقاديرها المجردة عين المقادير التى استخرجت من المسئلة الاولى

وأما المقادير التى بهذه الصورة $\frac{ج}{٠}$ فانها تدل على أن المسئلة غير ممكنة الحل وتحدث المقادير المذكورة من عدم موافقة بعض شروط المنطوق أو من اشتراط شرط لا يمكن تحققه أو من أن المنطوق يشتمل على شروط اكثر من المجاهيل

واما المقادير التى بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ فانها تدل على أن المسئلة غير معينة الحل والمقادير المذكورة تحدث من كون منطوق المسئلة مشتملا على شرط متحقق دائما أو محتويا على شروط أقل من المجاهيل

(تنبيه)

الملحوظات المتقدمة تحقق فى جميع المسائل الصالحة للمناقشة

(مناقشة عامة للمعادلات ذوات الدرجة الاولى)

(٤٨) ولنبدء بوضع المعادلات ذوات الدرجة الاولى وجملة مجاهيل وحلها فنقول كل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يمكن تحويلها الى هذه الصورة $ح\,س = ء$ التى يستخرج منها $س = \frac{ء}{ح}$

وكل

وكل معادلتين ذاتى درجة اولى ومجهولين يمكن تحويلهما الى هذه الصورة

ح س + ء ص = هـ و

حَ س + ءَ ص = هَ

فالحروف ح و ء و هـ و حَ و ءَ و هَ رموز لكميات صحيحة معلومة ذات علامات ما فاذا حلت هاتان المعادلتيان بمقتضى ماتقرر يحدث

س = (هـ ءَ − ء هَ) / (ح ءَ − ء حَ) و ص = (ح هَ − هـ حَ) / (ح ءَ − ء حَ)

وكل ثلاث معادلات ذوات درجة اولى وثلاثة مجاهيل يمكن تحويلها الى هذه الصورة

ح س + ء ص + هـ ع = و

حَ س + ءَ ص + هَ ع = وَ

حُ س + ءُ ص + هُ ع = وُ

فالحروف ح و ء و هـ و و و حَ و ءَ و هَ و وَ و حُ و ءُ و هُ و وُ تدل على كميات صحيحة معلومة ذات علامات ما ويحدث من هذه المعادلات الثلاث بطريقة حذف المجهولين ع و ص بالكيفية السابقة

س = (و ءَ هُ − و هَ ءُ + هـ وَ ءُ − ء وَ هُ + ء هَ وُ − هـ ءَ وُ) / (ح ءَ هُ − ح هَ ءُ + هـ حَ ءُ − ء حَ هُ + ء هَ حُ − هـ ءَ حُ)

فاذا وضع هذا المقدار فى احدى المعادلتين ذواتى المجهولين الحادثتين من اجراء العمل توصل الى مقدار ص واذا وضع مقدارا س و ص فى احدى المعادلات الثلاث المعلومة توصل الى مقدار ع لكن يمكن استخراج مقدارى ع و ص بطريقة مختصرة وذلك بالتنبيه على أن المعادلات الثلاث لا تتغير اذا غيرت فيها الرموز

ح و حَ و حُ و س و د و دَ و دُ و ص بالرموز

د و دَ و دُ و ص و ح و حَ و حُ و س

فحينئذ يكون التغيير جائزا فى الارتباطات المستخرجة من المعادلات المذكورة فاذا أجرى هذا التغيير فى مقدار س يحدث

ص = (وحَهُ − وهَحُ + هوَحُ − حوَهُ + حهَوُ − هحَوُ) / (دحَهُ − دهَحُ + هدَحُ − حدَهُ + حهَدُ − هحَدُ)

واذا غيرت علامات جميع حدود هذا الناتج وغير ترتيب الحدود يحدث

ص = (حوَهُ − حهَوُ + هحَوُ − وحَهُ + وهَحُ − هوَحُ) / (حدَهُ − حهَدُ + هحَدُ − دحَهُ + دهَحُ − هدَحُ)

وبتغيير مناظر للمتقدم يحدث

ع = (حدَوُ − حوَدُ + وحَدُ − دحَوُ + دوَحُ − ودَحُ) / (حدَهُ − حهَدُ + هحَدُ − دحَهُ + دهَحُ − هدَحُ)

ثم يجرى هذا العمل اذا اريد استخراج مقادير أربعة مجاهيل من اربع معادلات ذات أربعة مجاهيل ومن خمس معادلات ذات خمسة مجاهيل وهلم جرّا

(٤٩) بقرن النواتج المتقدمة بالمعادلات الحادثة منها تلك النواتج يحدث قاعدة ينبغى تصورها لكتابة هذه النواتج أى المقادير بدون اجراء حل المعادلات وهى أن يقال

اولا لتحصيل المقام المشترك لمقدارى س و ص المستخرجين من معادلتين ذاتى مجهولين يؤخذ مكررا ح و د من المعادلة الاولى ويركب منهما الحدان حد و دح مفصولين عن بعضهما بالعلامة ـ فيصيران حد ـ دح ثم يوضع على الحرف الاخير من كل حد هذه العلامة َ فيصيران حدَ ـ دحَ وهو المقام المطلوب ولتحصيل بسط مقدار أحد المجهولين بغيره كرر هذا المجهول فى المقام المشترك بالحد المعلوم بدون تغيير

العلامة

العلامة فيكون بسط مقدار س هكذا هـ ج ـ د ج وبسط مقدار

ص هكذا ج هـ ـ هـ ج

وثانيا لاستخراج المقام المشترك لمقادير س و ص و ع المستخرجة من المعادلات الثلاث المحتوية على ثلاثة مجاهيل يؤخذ المكرران ج و د ويركب منهما الحدان ج د و د ج ثم يفصلان عن بعضهما بالعلامة ـ فيصيران ج د ـ د ج ثم يدخل المكرر الثالث هـ فى آخر ووسط واول كل من الحدين المذكورين على التوالى فيحدث بادخاله فى الاول ج د هـ و ج هـ د و هـ ج د وفى الثانى د ج هـ و د هـ ج و هـ د ج

ثم يجعل لكل من الحدين الاولين ذوى الثلاثة حروف علامة الحد ذى الحرفين المكون له ثم تغير علامة الحدود التالية على التبادل فيحدث

ج هـ د ـ ج هـ د + هـ ج د ـ د ج هـ + د هـ ج ـ هـ د ج

ثم توضع هذه العلامة ـ على ثانى حرف من كل حد وهذه ـ على ثالث حرف ايضا فيحدث المقام المشترك وهو

ج دَ هً ـ ج هَ دً + هـ جَ دً ـ د جَ هً + د هَ جً ـ هـ دَ جً

ولاستنتاج بسط أحد مقادير المجاهيل الثلاثة يغير مكرر المجهول بالحرف المعلوم فى المقام المشترك

فاذا اريد استخراج بسط مقدار المجهول ص مثلا يغير فى المقام المشترك مكرره ج بالحرف المعلوم و فيحدث

و دَ هً ـ و هَ دً + هـ وَ دً ـ د وَ هً + د هَ وً ـ هـ دَ وً

واذا اريد استخراج مقادير المجاهيل من اربع معادلات ذوات اربعة مجاهيل أو خمس معادلات ذوات خمسة مجاهيل وهكذا تجرى عليها اعمال كالاعمال المتقدمة

(٥٠) يمكن استعمال القوانين العمومية المتقدمة فى حل معادلات

مخصوصة وذلك بان تغير فيها الحروف بمقاديرها من المعادلات المعلومة ثم تتمم عملها لكن حل المعادلات الرقمية من اول الامر أخصر

(٥١) البحث فى هذه المقادير يثبت لنا انه يمكن أن يحدث من حل المعادلات ذوات الدرجة الاولى أربعة أنواع من المقادير

الاول المقادير الموجبة والثانى المقادير السالبة والثالث المقادير التى بهذه الصورة $\frac{\text{ج}}{0}$ أو اللانهائية والرابع المقادير التى بهذه الصورة $\frac{0}{0}$ أو غير المعينة وقد علم مما مر أنه اذا كان عدد المعادلات م عين عدد المجاهيل المحتوية عليها كانت جملة المعادلات ممكنة الحل ومنتهية الا اذا كانت محتوية على معادلة فاسدة أو على معادلات غير متوافقة فالحل غير ممكن ومتى كانت الجملة محتوية على معادلات متطابقة أو على بعض معادلات متداخلة فى بعضها فالحل غير معين اذا تقرر ذلك نطبقه على معادلة عمومية ذات مجهول واحد وعلى معادلتين عموميتين ذاتى مجهولين فنقول

اولا اذا فرض معادلة $\text{ح}\,\text{س} = \text{ء}$ واستخرج منها مقدار $\text{س} = \frac{\text{ء}}{\text{ح}}$ وفرض فيه أيضا $\text{ح} = 0$ يحدث $\text{س} = \frac{\text{ء}}{0}$ أعنى أن مقدار س على مقتضى ما تقدم يكون غير محدود فى الكبر فالمعادلة لا تتحقق باى مقدار محدود لانها تصير $0 \times \text{س} = \text{ء}$ وهى معادلة فاسدة لان الصفر المضروب فى عدد محدود لا يساوى أبدا مقدار ء

وثانيا اذا فرضت معادلتان ذاتا مجهولين

$\text{ح}\,\text{س} + \text{ء}\,\text{ص} = \text{هـ}$ و $\text{حَ}\,\text{س} + \text{ءَ}\,\text{ص} = \text{هَ}$ واستخرج منهما المقداران

$$\text{س} = \frac{\text{هـ}\,\text{ءَ} - \text{ء}\,\text{هَ}}{\text{ح}\,\text{ءَ} - \text{ء}\,\text{حَ}} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{\text{ح}\,\text{هَ} - \text{هـ}\,\text{حَ}}{\text{ح}\,\text{ءَ} - \text{ء}\,\text{حَ}}$$

وجعل فى هذين المقدارين العموميين $\text{ح}\,\text{ءَ} - \text{ء}\,\text{حَ} = 0$

أى $\text{ح}\,\text{ءَ} = \text{ء}\,\text{حَ}$ و $\text{هـ}\,\text{ءَ} - \text{ء}\,\text{هَ} \neq 0$ أى $\text{هـ}\,\text{ءَ} \neq \text{ء}\,\text{هَ}$

يؤل مقدار $ص = \overline{هءَ - ءهَ}$ الى $\frac{ل}{٠}$ بالرمز للبسط بالحرف ل ويكون غير محدود فى الكبر والمعادلتان المعلومتان لا تتحققان بأى مقدار محدود فرض للمجهول س وتكونان فى الحقيقة متخالفتين لانه يستخرج من الفرضين المتقدمين اللذين هما $حءَ = ءحَ$ و $هءَ \neq ءهَ$ بالتقسيم على الحروف المعلمة $\frac{ح}{حَ} = \frac{ء}{ءَ}$ و $\frac{ه}{هَ} \neq \frac{ء}{ءَ}$ واذا رمز للنسبتين المتساويتين اللتين هما $\frac{ح}{حَ}$ و $\frac{ء}{ءَ}$ بالحرف لْ وللنسبة $\frac{ه}{هَ}$ بالحرف ر يحدث

$\frac{ح}{حَ} = لْ$ و $\frac{ء}{ءَ} = لْ$ و $\frac{ه}{هَ} = ر$ وينتج من ذلك

$ح = حَ لْ$ و $ء = ءَ لْ$ و $ه = هَ ر$

واذا ابدلت فى المعادلة $حس + ءص = ه$ الحروف ح و ء و ه بمقاديرها يحدث $حَ لْ س + ءَ لْ ص = رهَ$ وهى معادلة متخالفة مع الثانية لانها وان كانت عينها الا أن طرفيها قد ضربا فى كميتين مختلفتين ر و لْ

وثالثا اذا كان مقدار المجهول س بهذه الصورة $\frac{ح}{٠}$ يكون مقدار ص بهذه الصورة ايضا لان مقام مقدار ص مساو يالصفر فلم يبق الا البرهنة على أن بسطه ليس مساويا لصفر أو على أن $حهَ \neq هحَ$ فيقال حيث تقدم أن $\frac{ح}{حَ} = \frac{ء}{ءَ}$ و $\frac{ه}{هَ} \neq \frac{ء}{ءَ}$ يحدث $\frac{ح}{حَ} \neq \frac{ه}{هَ}$ أو $حهَ \neq هحَ$ فاذن يكون مقدار ص بهذه الصورة $\frac{ح}{٠}$

ورابعا اذا فرض معادلة $حس = ء$ واستخرج منها $س = \frac{ء}{ح}$ وجعل فى هذا المقدار العمومى $ح = ٠$ و $ء = ٠$ يحدث $س = \frac{٠}{٠}$ فعلى مقتضى ما تقدم يكون مقدار ص غير معين أعنى أن

جميع المقادير المحدودة تحقق المعادلة المعلومة لانها تصير $٠ \times \text{ص} = ٠$ وهي معادلة متطابقة لان الصفر اذا ضرب في عدد ما محدود يحدث حاصلا مساويا لصفر

واذا فرض معادلتان ذاتا مجهولين

$\text{حس} + \text{دص} = \text{ه}$ و $\text{حَس} + \text{دَص} = \text{هَ}$ واستخرج منهما المقداران

$$\text{س} = \frac{\text{هدَ} - \text{دهَ}}{\text{حدَ} - \text{دحَ}} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{\text{حهَ} - \text{هحَ}}{\text{حدَ} - \text{دحَ}}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين $\text{هدَ} - \text{دهَ} = ٠$ و $\text{حدَ} - \text{دحَ} = ٠$ أي $\text{هدَ} = \text{دهَ}$ و $\text{حدَ} = \text{دحَ}$ يحدث $\text{س} = \frac{٠}{٠}$ وهو مقدار غير معين وحيث شوهد فيما تقدم أن غير المعين لا يقع الا اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل يلزم البرهنة على أن هاتين المعادلتين المعلومتين ليستا الا واحدة لانه اذا استخرج من الفرضين المتقدمين $\text{هدَ} = \text{دهَ}$ و $\text{حدَ} = \text{دحَ}$ بالتقسيم على الحروف المعلمة النسب $\frac{\text{ه}}{\text{هَ}} = \frac{\text{د}}{\text{دَ}}$ و $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{د}}{\text{دَ}}$ ورمز لها بالحرف ك يحدث

$\frac{\text{ه}}{\text{دَ}} = \text{ك}$ و $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \text{ك}$ و $\frac{\text{د}}{\text{دَ}} = \text{ك}$ أو $\text{ه} = \text{هَك}$ و $\text{ح} = \text{حَك}$ و $\text{د} = \text{دَك}$

واذا وضع في المعادلة $\text{حس} + \text{دص} = \text{ه}$ بدل الرموز ح و د و ه مقاديرها المتقدمة تؤل الى $\text{حَكس} + \text{دَكص} = \text{هَك}$ وهي معادلة لا تخالف المعادلة الثانية الا بضرب طرفيها في ك فحينئذ المعادلتان المفروضتان ليستا الا واحدة

واذا كان مقدار س بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ يكون مقدار ص كذلك لان

مقام

مقام صه مساو للصفر فلم يبق الا البرهنة على أن بسطه مساو للصفر ايضا أى على أن $حـ هَ = هـ حَ$ فيقال حيث تقدم أن

$\frac{هـ}{هَ} = \frac{ء}{ءَ}$ و $\frac{حـ}{حَ} = \frac{ء}{ءَ}$ يحدث $\frac{هـ}{هَ} = \frac{حـ}{حَ}$ أو $هـ حَ = حـ هَ$ فاذن يكون مقدار صه بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$

(تنبيهات)

الاول قد نتج من جعل $هـ ءَ = ء هَ$ و $حـ ءَ = ء حَ$ ان مقدارى سه و صه يكونان بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ فاذا ضم لهذين الفرضين فرض $هـ = ٠$ و $هَ = ٠$ حدث ناتج عين الاول فمقدارا سه و صه يمتنع ان يكونا معينين غير ان بينهما نسبة ثابتة لانه اذا جعل فى المعادلتين المعلومتين $هـ = ٠$ و $هَ = ٠$ الاالى $حـ سه + ء صه = ٠$ و $حَ سه + ءَ صه = ٠$ ومنهما يحدث

$$سه = -\frac{ء صه}{حـ} \quad و \quad سه = -\frac{ءَ صه}{حَ}$$

وحيث نتج من فرض $حـ ءَ - ء حَ = ٠$ أن $\frac{ء}{حـ} = \frac{ءَ}{حَ}$ يؤل مقدارا سه الى $سه = -\frac{ء}{حـ} صه$ ومنه يحدث $\frac{سه}{صه} = -\frac{ء}{حـ}$ أعنى أن النسبة بين مقدارى سه و صه مساوية $-\frac{ء}{حـ}$ وهى نسبة ثابتة

الثانى قد ظهر من المناقشة المتقدمة أن مقدارى المجهولين لجملة محتوية على معادلتين ذاتى مجهولين كالمتقدمتين يكونان فى آن واحد لانهائيين أو غير معينين لكن هذا لا يتيسر فى جملة معادلتين متشعبتين ذاتى مجهولين

الثالث قد شوهد أن المقدار الذى بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ يدل على ان المقدار غير معين وقد يدل مع ذلك على وجود ضروب مشتركة بين حدى الكسر مساو للصفر حين يفرض فرض مخصوص لهذين الحدين فاذا فرض مثلا

$س = \frac{ح^٣ - ء^٣}{ح^٢ - ء^٢}$ وجعل فيه $ح = ء$ آل الى $س = \frac{٠}{٠}$ لكن
حيث أى حدى الكسر $\frac{ح^٣ - ء^٣}{ح^٢ - ء^٢}$ يقبلان القسمة على $ح - ء$ وأن
احدهما يساوى $(ح - ء)(ح^٢ + حء + ء^٢)$ والآخر يساوى $(ح - ء)(ح + ء)$
حدث $س = \frac{(ح - ء)(ح^٢ + حء + ء^٢)}{(ح - ء)(ح + ء)}$ أو $س = \frac{ح^٢ + حء + ء^٢}{ح + ء}$
بحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن ان $ح = ء$ آل مقدار $س$ الى $\frac{٣ح^٢}{٢ح} = \frac{٣ح}{٢}$
فاذن يكون مقدار $س$ معينا

واذا فرض أيضا فى مقدار $س = \frac{ح^٢ - ٢حء + ء^٢}{ح^٢ - حء}$ ان $ح = ء$ آل
الى $س = \frac{٠}{٠}$ لكن حيث أن مقدار $س$ يمكن وضعه بهذه الصورة
$س = \frac{(ح - ء)^٢}{ح(ح - ء)}$ وأن حداه قابلان للقسمة على $ح - ء$ يصير
$س = \frac{ح - ء}{ح}$ بحذف المضروب المشترك
فاذا فرض الآن فى هذا المقدار أن $ح = ء$ آل الى $س = \frac{٠}{ح} = ٠$
واذا فرض أيضا فى مقدار $س = \frac{\sqrt{ح}}{٢ح}$ أن $ح = ٠$ آل الى $س = \frac{٠}{٠}$
ومن المعلوم انه يوجد مضروب مشترك بين حدى الكسر $\frac{\sqrt{ح}}{٢ح}$ فلتعيينه
يضرب حداه فى $\sqrt{ح}$ فيحدث $س = \frac{ح}{٢ح\sqrt{ح}}$ ثم بقسمة حدى
هذا المقدار على المضروب المشترك $ح$ يؤل الى $س = \frac{١}{٢\sqrt{ح}}$ ثم
بفرض $ح = ٠$ يؤل هذا المقدار الى $\frac{١}{٠}$
فحينئذ مقدار $س$ المساوى $\frac{٠}{٠}$ يدل فى بعض الاحيان على وجود
مضروب مشترك بين حدى الكسر المبين به مقدار المجهول فمتى تحقق وجوده
لزم اولا حذفه ثم اجراء الفروض التى بها يؤول حدا الكسر الى صفر فحينئذ

يصير مقدار المجهول بهذه الصورة $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ أو $\frac{\text{٠}}{\text{ح}}$ او $\frac{\text{ح}}{\text{٠}}$ أعني انه منته اوعدمي اولانهائي

(الباب الثالث)

(في المربع والجذر التربيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية)

(في المربع والجذر التربيعي)

(٥٢) قد تقدم أن مربع الكمية هو حاصل ضرب مضروبين كل منهما مساو لها وان الجذر التربيعي لكمية مقدار اذا رفع الى الدرجة الثانية تحصلت تلك الكمية فحينئذ يكون $\text{ح}^{٢}$ مربع ح و $\text{د}^{٢}$ الجذر التربيعي للحد $\text{د}^{٤}$ ومربع $\sqrt{\text{ح}}$ هو ح

(٥٣) فمربع الحد ٥ $\text{ح}^{٢}$ د يكون مساويا ٥ $\text{ح}^{٢}$ د × ٥ $\text{ح}^{٢}$ د = ٢٥ $\text{ح}^{٤}$ $\text{د}^{٢}$

(قاعدة) لتربيع حد يربع مكرره ونضاعف اسس كل من حروفه

(قاعدة اخرى عكس المتقدمة) استخراج جذر مربع حد يكون باستخراج الجذر التربيعي لمكرره ثم تنصيف اسس كل من حروفه فحينئذ

$$\sqrt{\text{٤٩ ح}^{٤}\text{ د}^{٦}\text{ ه}^{٢}} = \text{٧ ح}^{٢}\text{ د}^{٣}\text{ ه}$$

(تنبيه)

الحد يكون مربعا كاملا متى كان مكرره مربعا كاملا وكانت اسس جميع حروفه زوجية فان لم يكن كذلك فليس بكامل وحينئذ فيوضع عليه هذه العلامة $\sqrt{}$ والكمية الناتجة من ذلك تسمى حدا غير جذري أو جذرا أصم او جذرا بدرجة ثانية وذلك نحو $\sqrt{\text{٣٢ ح}^{٥}\text{ د}^{٢}}$ فاذا كانت الكمية محتوية على جذر منطق اوكانت محتوية على جذر يمكن استخراجه سميت كمية جذرية

(٥٤) اختصار الجذر الاصم الذي بدرجة ثانية مؤسس على قاعدة هي أن الجذر التربيعي لحاصل ضرب يكون مساويا لحاصل ضرب الجذور التربيعية

لكل من مضاريبه فى بعضها فحينئذ

$$\sqrt{\text{ح د هـ}} = \sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}} \quad \text{لان} \quad \left(\sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}}\right)^{٢}$$

$$= \left(\sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}}\right)\left(\sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}}\right) = \sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}}$$

$$\times \sqrt{\text{هـ}} \times \sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}} = \sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{د}}$$

$$\times \sqrt{\text{هـ}} \times \sqrt{\text{هـ}} = \text{ح د هـ}$$

فاذن يكون مربع $\sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}}$ مساويا ح د هـ وينتج من ذلك أن $\sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} \times \sqrt{\text{هـ}}$ يكون مساويا للجذر التربيعى للحد ح د هـ

(٥٥) لاختصار الجذر الاصم $\sqrt{\text{٣٢ ح}^{٥}\text{د}^{٢}}$ يحلل ٣٢ ح^{٥} د^{٢} الى مضروبين أحدهما يكون مربعا كاملا فيحدث

$$\sqrt{\text{٣٢ ح}^{٥}\text{د}^{٢}} = \sqrt{\text{١٦ ح}^{٤}\text{د}^{٢} \times \text{٢ ح}} = \sqrt{\text{١٦ ح}^{٤} \times \text{د}^{٢} \times \text{٢ ح}} = \text{٤ ح}^{٢}\text{د} \sqrt{\text{٢ ح}}$$

(قاعدة) لاختصار جذر أصم بدرجة ثانية يستخرج الجذر التربيعى لجميع المضاريب المربعة الموجودة تحت علامة الجذر ثم يكتب حاصل ضرب هذه الجذور على يمين علامة الجذر التى تترك تحتها المضاريب التى لم تكن مربعات كاملة ومكرر الجذر فى مقدار ٤ ح^{٢} د $\sqrt{\text{٢ ح}}$ هو الكمية ٤ ح^{٢} د

(قاعدة) لادخال مكرر الجذر التربيعى تحت العلامة يرفع هذا المكرر الى الدرجة الثانية ثم يضرب بعد رفعه فى الكمية التى تحت علامة الجذر فحينئذ

$$\text{٤ ح}^{٢}\text{د} \sqrt{\text{٢ ح}} = \sqrt{\text{٢ ح} \times \text{١٦ ح}^{٤}\text{د}^{٢}} = \sqrt{\text{٣٢ ح}^{٥}\text{د}^{٢}}$$

ويمكن اثبات هذه القاعدة من اول الامر بملاحظة أن ٤ ح^{٢} د $= \sqrt{\text{١٦ ح}^{٤}\text{د}^{٢}}$ وتذكر ما سبق فى القاعدة المثبتة فى البند السابق فعلى مقتضى ذلك

$\sqrt{\text{ح}} \times \sqrt{\text{د}} = \sqrt{\text{ح د}}$ فاذن يكون

$\sqrt{\text{٤ ح د}^{٢}} = \text{٢ ح}\sqrt{\times\text{١٦ ح د}^{٢٤}} = \text{٢ ح}\sqrt{\text{١٦ ح د}^{٢٤٠}\times\text{٢ ح}} = \sqrt{\text{٣٢ ح د}^{٢٥}}$

(٥٦) ماتقدّم في (بند ٥٣) من قواعد التربيع واخذ الجذر التربيعي لحد لم نتعرّض فيه للعلامة ولنتعرّض لها فنقول

اولا ان مربع أي حد يكون موجبا دائما لانه متحصل من ضرب حدين متحدين في العلامة

وثانيا ان الجذر التربيعي لحد موجب كحد $\text{ح}^{٢}$ يكون + ح أو — ح لان كلا منهما اذا رفع الى الدرجة الثانية حدث منه $\text{ح}^{٢}$ فيكون الجذر التربيعي لحد متبوعا بالعلامة + أو — وتوضع هذه العلامة المضاعفة $\pm$ امامه ملفوظا بها زائدا وناقص فحينئذ يكون

$$\sqrt{\text{ح}^{٢}} = \pm\,\text{ح}$$

وان الجذرين التربيعيين لحد سالب كحد — $\text{ح}^{٢}$ لا وجود لهما لان كل كمية سالبة أو موجبة اذا رفعت الى القوة الثانية حدث منها ناتج موجب فحينئذ يكون $\sqrt{-\text{ح}^{٢}}$ هو كمية تخيلية أو مقدار تخيلي والكمية الحقيقية سواء كانت موجبة أو سالبة جذرية أو غير جذرية هي ماعدا التخيلية

(٥٧) نتائج يتوصل اليها ببراهين مشابهة للمتقدمة

الاولى لرفع حد الى القوة الثالثة أي التكعيب يكعب مكرره وتثلث اسس حروفه فتكعيب حد ٧ $\text{ح د}^{٢}\text{هـ}^{٣}$ هو ٣٤٣ $\text{ح}^{٣}\text{د}^{٦}\text{هـ}^{٩}$

الثانية لاستخراج الجذر التكعيبي لحد يستخرج الجذر التكعيبي لمكرره ويؤخذ ثلث كل من اسس حروفه فالجذر التكعيبي للحد ٢٧ $\text{ح}^{٦}\text{د}^{١٢}$ هو ٣ $\text{ح}^{٢}\text{د}^{٤}$

الثالثة لاختصار الجذر التكعيبي الأصم لحد يستخرج الجذر التكعيبي لمضاريبه المكعبة الموجودة تحت علامة الجذر المذكور ويوضع جذرها

مكرر العلامة الجذر فحينئذ

$$\sqrt[3]{٤٠\,حد^{٥}} = \sqrt[3]{٨\,حد^{٣} \times ٥\,حد^{٢}} = ٢\,حد\,\sqrt[3]{٥\,حد^{٢}}$$

الرابعة لادخال مكرر تحت علامة جذر تكعيبي يرفع هذا المكرر الى القوة الثالثة ويضرب فى الكمية الكائنة تحت العلامة المذكورة فحينئذ

$$٢\,حد\,\sqrt[3]{٣} = \sqrt[3]{٢٤\,حد^{٣}}$$

الخامسة علامة تكعيب حد تكون دائما عين علامة الحد وعلامة الجذر التكعيبي لحد تكون ايضا عين علامة الحد فحينئذ

$$\left(-٥\,حد^{٣}\right)^{٣} = -١٢٥\,حد^{٩} \quad و \quad \sqrt[3]{-٨\,حد^{٦}} = -٢\,حد^{٢}$$

(٥٨) استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود يتوقف على قاعدة تكوين مربع الكمية المذكورة وقد تقدمت قاعدة تكوين مربع كمية ذات حدين ككمية $(ح + د)^{٢}$ المساوية $ح^{٢} + ٢\,ح\,د + د^{٢}$

فاذا اريد تربيع كمية ذات ثلاثة حدود ككمية $ح + د + هـ$ يرمز للحدين $ح + د$ بالحرف $س$ فيحدث

$$(ح + د + هـ)^{٢} = (س + هـ)^{٢} = س^{٢} + ٢\,هـ\,س + هـ^{٢}$$

وبابدال $س$ بمقداره يحدث

$$(ح+د+هـ)^{٢} = (ح+د)^{٢} + ٢هـ\,(ح+د) + هـ^{٢} = ح^{٢} + ٢\,ح\,د + د^{٢}$$
$$+\ ٢\,ح\,هـ + ٢\,د\,هـ + هـ^{٢}$$

اعنى ان مربع كمية ذات ثلاثة حدود يتركب من حاصل جمع مربعات جميع حدودها ومن ضعف حاصل ضرب حدودها مثنى

وهذه القاعدة مطردة فى كل كمية ذات حدود لانه اذا فرض انها متحققة فى كمية ذات حدود عدد حدودها م كالكمية $ح + د + هـ + \ldots + ل$

تكون

تكون متحققة ايضا فى كمية ذات حدود عددها يزيد عن عدد حدود الاولى بواحد كالكمية $\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل} + \text{لَ}$ لانه اذا رمز بالحرف س للكمية الاولى $\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل}$ فتربيع الاخرى يكون $(\text{س} + \text{لَ})^{2} = \text{س}^{2} + 2\,\text{سلَ} + \text{لَ}^{2}$

ثم يبدل رمز س بمقداره فيحدث

$$(\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل} + \text{لَ})^{2} = (\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل})^{2}$$

$$+ 2\,\text{لَ}\,(\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل}) + \text{لَ}^{2}$$

وحيث أن الجزء الاول $(\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل})^{2}$ من الطرف الثانى عين مربع الكمية ذات الحدود الاولى التى عدد حدودها م وان الجزء الثانى $2\,\text{لَ}\,(\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \cdots + \text{ل})$ من الطرف المذكور مركب من ضعف حاصل ضرب الحدود التى عددها م فى الحد الجديد اى مركب من ضعف حواصل ضرب الحدود مثنى وان الجزء الثالث وهو لَ^{2} من الطرف المذكور مكون من تربيع الحد الجديد يكون مربع كمية ذات حدود عددها $\text{م} + 1$ مشتملا على حاصل جمع مربعات جميع حدودها وضعف حواصل ضرب حدودها مثنى فاذا كانت قاعدة التكوين هذه مطردة فى كمية ذات حدود تكون مطردة أيضا فى كمية ذات حدود عددها زائد عن الاولى بواحد فحيث كانت مطردة فى كمية ذات ثلاثة حدود تكون مطردة فى كمية ذات اربعة حدود وخمسة حدود وهكذا

(تنبيه)

يلفظ بهذه القاعدة بكيفية نافعة فى النتائج التى يراد استخراجها بان يقال مربع كمية ذات حدود يحتوى على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الثانى زائدا ضعف حاصل ضرب كل من الحدين الاول والثانى فى الثالث زائدا مربع الثالث زائدا ضعف حواصل

ضرب كل من الحد الاول والثانى والثالث فى الحد الرابع زائدا مربع الحد الرابع وهكذا

(٥٩) اذا طلب الآن استخراج الجذر التربيعى لكمية ذات حدود كالكمية

ا + ب + ح + ء + الخ يفرض اً + بً + حً + الخ

الجذر المطلوب ثم بفرض أن هاتين الكميتين مرتبتان بحسب الدرجات التنازلية لحرف كالحرف س يجرى العمل هكذا

ا + ب + ح + ء + الخ	اً + بً + حً + الخ
ح + ء	٢ اً + بً
	+ بً

فالكمية ذات الحدود ا + ب + ح + ء + الخ يمكن اعتبارها

حاصل ضرب كمية اً + بً + حً + الخ فى اً + بً + حً + الخ

وحيث ان هذا الحاصل مرتب كمضروبيه بحسب الدرجات التنازلية للحرف

س المذكور يكون ا حاصل ضرب اً فى اً أى مربع اً (كما فى تنبيه

بند ١٤) فبناء عليه يستخرج اً وهو اول حد من الجذر باخذ الجذر التربيعى للحد الاول من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يربع هذا الحد الناتج ويطرح منها فينمحى الحد الاول وهو ا ويكون الحد الثانى ب من الكمية المذكورة ضعف حاصل ضرب اول حد من الجذر فى حده الثانى لانه اذا رمز

الى بً + حً + ءً + الخ بالحرف ر يحدث ا + ب + ح + ء + الخ

$=(اً + ر)^٢ = اً^٢ + ٢ اً ر + ر^٢$ وبطرح الكميتين المتساويتين ا و $اً^٢$ من كل من الطرفين ووضع ر مضروبا مشتركا يحدث

ب + ح + ء + الخ = ر (٢ اً + ر) واذا وضع بدل ر مقداره يحدث

ب + ح + د + الخ = (بً + حً + دً + الخ)(٢ اً + بً + حً + دً + الخ)

وحيث ان الكمية ذات الحدود ب + ح + د + الخ المرتبة بحسب الدرجات التنازلية لحرف الترتيب مساوية لحاصل ضرب الكمية

بً + حً + دً + الخ في الكمية ٢ اً + بً + حً + دً + الخ

المرتبتين كترتيبها يكون الحد الاول ب من الاولى مساويا لحاصل ضرب

حد بً في ٢ اً من الكميتين الاخريين وبناء عليه يستنتج الحد الثاني

بً من الجذر بتقسيم الحد الاول ب من الباقي الاول على ٢ اً وهو ضعف الحد الاول من الجذر وحيث علم حد بً يطرح ضعف حاصل ضرب الحد الاول من الجذر في الحد الثاني منه ثم مربع الحد الثاني اي يطرح حاصل ضرب

٢ اً + بً في بً من الكمية ب + ح + د + الخ فيبقى باق بهذه

الصورة حَ + د + الخ حده الاول ضعف حاصل ضرب اول حد من

الجذر في الحد الثالث منه حً لانه اذا رمز بالحرف رَ للحدين اً + بً

وبالحرف ر للحدود الباقية من الجذر وهي حً + دً + الخ ينتج

ا + ب + ح + د + الخ = (رَ + ر)^٢ = رَ^٢ + ٢ رَ ر + ر^٢

أو حَ + د + الخ = ر (٢ رَ + ر)

أو حَ + د + الخ = (حً + دً + الخ) (٢ اً + ٢ بً + حً + دً + الخ)

وحيث أن الكمية حَ + د + الخ حاصل ضرب الكمية حً + دً + الخ

في الكمية ٢ اً + ٢ بً + حً + دً + الخ المرتبتين كترتيبها يكون حَ

مساويا لحاصل ضرب حً في ٢ اً وبناء عليه يستنتج الحد الثالث من الجذر

بتقسيم الحدّ الاول من الباقى الثانى على ضعف الحدّ الاول من الجذر المذكور ومثل ذلك يجرى فى استخراج باقى حدود الجذر وينتج من ذلك قاعدة نذكرها فنقول

(قاعدة) لاستخراج الجذر التربيعى لكمية ذات حدود ترتب بحسب الدرجات التصاعدية أو التنازلية لاحد حروفها ثم يستخرج الجذر التربيعى لحدّها الاول فيكون الحد الاول من الجذر المطلوب ثم يربع هذا الحدّ ويطرح من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يقسم الحدّ الثانى من الكمية المعلومة على ضعف الحدّ الاول من الجذر فينتج الحدّ الثانى من الجذر المطلوب فيضاعف حاصل ضرب اول حدّ من الجذر فى الحدّ الثانى منه ثم يضم الى الضعف المذكور تربيع هذا الحدّ ويطرح المجموع من الباقى الاول ثم يقسم الحدّ الاول من الباقى الجديد على ضعف الحدّ الاول من الجذر فينتج الحدّ الثالث من الجذر ثم يكون ضعف حاصل ضرب الحدّ الاول والثانى من الجذر فى الثالث ويضاف على الحاصل مربع حدّ الجذر الثالث ويطرح المجموع من الباقى الثانى ولايجاد الحد الرابع من الجذر يقسم الحد الاول من الباقى الثالث على ضعف الحد الاول من الجذر ثم يجرى باقى العمل على اسلوب ماتقدم

ولتطبيق هذه القاعدة على استخراج الجذر التربيعى للكمية ذات الحدود ٢٨ حـ^{٢}ء^{٢} + ١٦ ء^{٤} — ١٢ حـ^{٣}ء + ٩ حـ^{٤} — ١٦ حـ ء^{٣} ترتب بحسب الدرجات التصاعدية للحرف حـ ويجرى العمل هكذا

$٤\text{د}^{٢} - ٢\text{دح} + ٣\text{ح}^{٢}$ | $١٦\text{د}^{٤} - ١٦\text{د}^{٣}\text{ح} + ٢٨\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢} - ١٢\text{دح}^{٣} + ٩\text{ح}^{٤}$

$٨\text{د}^{٢} - ٢\text{دح}$ | $-١٦\text{د}^{٤}$

-٢دح — الباقى الاول $-١٦\text{د}^{٣}\text{ح} + ٢٨\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢} - ١٢\text{دح}^{٣} + ٩\text{ح}^{٤}$

$٨\text{د}^{٢} - ٤\text{دح} + ٣\text{ح}^{٢}$ — $+١٦\text{د}^{٣}\text{ح} - ٤\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢}$

$+٣\text{ح}^{٢}$ — الباقى الثانى $+٢٤\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢} - ١٢\text{دح}^{٣} + ٩\text{ح}^{٤}$

$-٢٤\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢} + ١٢\text{دح}^{٣} - ٩\text{ح}^{٤}$

الباقى الثالث .. .. ..

بأن يستخرج الجذر التربيعي للحد $١٦\text{د}^{٤}$ فيكون $٤\text{د}^{٢}$ هو الحد الاول للجذر ثم يربع هذا الحد ويطرح من الكمية ذات الحدود المعلومة فيحدث باق $-١٦\text{د}^{٣}\text{ح} + ٢٨\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢} - ١٢\text{دح}^{٣} + ٩\text{ح}^{٤}$ يقسم حده الاول $-١٦\text{د}^{٣}\text{ح}$ على $٨\text{د}^{٢}$ الذى هو ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثانى للجذر وهو -٢دح ولتحصيل ضعف حاصل ضرب الحد الاول من الجذر فى الثانى وتحصيل مربع الحد الثانى يكتب هذا الحد الاخير على شمال ضعف الحد الاول ثم يضرب الناتج وهو $٨\text{د}^{٢} - ٢\text{دح}$ فى الحد الثانى -٢دح ثم يطرح الحاصل من الباقى الاول فيحدث باق ثان $٢٤\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢} - ١٢\text{دح}^{٣} + ٩\text{ح}^{٤}$ يقسم حده الاول $٢٤\text{د}^{٢}\text{ح}^{٢}$ على ضعف الحد الاول من الجذر $٨\text{د}^{٢}$ فينتج الحد الثالث $٣\text{ح}^{٢}$ من الجذر ولتكوين ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثانى فى الثالث ومربع الثالث يكتب هذا الحد الاخير على شمال ضعف الحد الاول والثانى ثم يضرب الناتج $٨\text{د}^{٢} - ٤\text{دح} + ٣\text{ح}^{٢}$ فى الحد الثالث $٣\text{ح}^{٢}$ ثم يطرح الحاصل من

الباقى الثانى فيكون الباقى الجديد صفرا فاذن يكون الجذر التربيعى للكمية ذات الحدود المعلومة $٤ د^{٢} - ٢ ح د + ٣ ح^{٢}$

(تنابيه)

الاول يمكن ان يجرى هنا ما اجرى فى القسمة بطرح كل حاصل ضرب واختصار الحدود المتشابهة من اول الامر هكذا

$$١٦ د^{٤} - ١٦ ح د^{٣} + ٢٨ ح^{٢} د^{٢} - ١٢ ح^{٣} د + ٩ ح^{٤} \quad | \quad ٤ د^{٢} - ٢ ح د + ٣ ح^{٢}$$

$$+ ٢٤ ح^{٢} د^{٢} - ١٢ ح^{٣} د + ٩ ح^{٤} \quad | \quad ٨ د^{٢} - ٢ ح د$$

$$.. \quad .. \quad .. \qquad - ٢ ح د$$

$$٨ د^{٢} - ٤ ح د + ٣ ح^{٢}$$

$$+ ٣ ح^{٢}$$

الثانى اذا غيرت علامات حدود الجذر $٤ د^{٢} - ٢ ح د + ٣ ح^{٢}$ فمقداره المجرد لا يتغير لانه اذا رمز للكمية $٤ د^{٢} - ٢ ح د + ٣ ح^{٢}$ بالحرف ر تكون الكمية الجديدة الحادثة بعد التغيير $-$ ر وتكون الكمية ذات الحدود المعلومة $١٦ د^{٤} - ١٦ ح د^{٣} + ٢٨ ح^{٢} د^{٢} - ١٢ ح^{٣} د + ٩ ح^{٤}$ مربعا كاملا للكمية ر فتكون كذلك للكمية $-$ ر (كما فى بند ٥٦) وحينئذ يكون لجذر الكمية المعلومة مقداران متميزان هما

$(٤ د^{٢} - ٢ ح د + ٣ ح^{٢})$ و $-(٤ د^{٢} - ٢ ح د + ٣ ح^{٢})$ والاخير ناتج من وضع علامة ناقص امام الاول

الثالث الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب حرف مربع كامل اذا كان حدها الاول مربعا كاملا وحدها الثانى قابلا للقسمة على ضعف جذر الحد الاول أو كان حدها الاخير مربعا كاملا والذى قبله قابلا للقسمة على ضعف

الـ

الحد الاخير وكان مع ذلك الحد الاول من كل باق فى مجرى العمل قابلا للقسمة على ضعف الحد الاول من الجذر .

الرابع الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب الدرجات التنازلية لحرف يعرف انها غير مربع كامل متى كان ضعف اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الجذر اقل من اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة لان الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة يجب ان يكون مربع الحد الاخير من الجذر فيكون اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة ضعف اس هذا الحرف فى الحد الاخير من الجذر وحيث ان ضعف اس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الجذر أقل من أس حرف الترتيب فى الحد الاخير من الكمية المعلومة وان اسس حرف الترتيب فى الجذر لا تزل متناقصة لا ينتج فى الجذر حد مربعه مساو للحد الاخير من الكمية ذات الحدود المفروضة فحينئذ لا يمكن انتهاء العملية

الخامس ذات الحدين لا تكون مربعا كاملا ابدا لان مربع الحد حد ومربع ذات الحدين ثلاثة حدود ومربع ذات الحدود اربعة حدود واقل ما هنالك

(٦٠) متى اريد استخراج الجذر التربيعى لكمية ذات حدود بعضها مشتمل على حرف الترتيب باس واحد توضع هذه الكمية كوضعها فى عمل التقسيم المتقدم فى (بند ٢١) فحينئذ تؤول العمليات الجزئية المبينة بالقاعدة العمومية من البند المذكور الى استخراج الجذر التربيعى للكمية المعلومة اوالى تقسيم كمية ذات حدود على اخرى

(٦١) قد سبق الكلام على استخراج الجذر التربيعى للكميات الجبرية الصحيحة ولاستخراج الجذر التربيعى للكسور نسلك الطريقة المقررة فى علم الحساب لان مربع الكسر يتكون برفع حديه للدرجة الثانية فحينئذ يستخرج جذر الكسر باستخراج الجذر التربيعى لكل من حديه

(فى حساب الجذور الصم ذات الدرجة الثانية والثالثة)

(٦٢) الجذران الاصمان يكونان متشابهين اذا اتحدت درجتهما

واتحدت الكميات الموضوعة تحت علامتهما فجذرا

$$٣ح\sqrt{ه} \quad و \quad ٢ى\sqrt{ه}$$

متشابهان وكذلك جذرا $٢\sqrt[٣]{ح}$ و $٧\sqrt[٣]{ح}$

(الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها)

مكرر الجذر يدل على عدد مرات تكرار هذا الجذر فحينئذ جمع جذرين متشابهين أو طرحهما يكون بجمع أو طرح مكرريهما ثم وضع حاصل الجمع أو باقي الطرح امام الجذر المشترك فاذن يكون

$$٣\sqrt{ح}+٥\sqrt{ح}=٨\sqrt{ح} \quad و \quad ٢\sqrt{ح}-٥\sqrt{ح}=-٣\sqrt{ح}$$

$$و \quad ٢ح\sqrt{ى}+٣ه\sqrt{ى}=(٢ح+٣ه)\sqrt{ى} \quad و \quad ٨\sqrt[٣]{ح}+٩\sqrt[٣]{ح}=١٧\sqrt[٣]{ح}$$

$$و \quad ٧\sqrt[٣]{ح}-٣\sqrt[٣]{ح}=٤\sqrt[٣]{ح} \quad و \quad ح\sqrt[٣]{ى}-ه\sqrt[٣]{ى}=(ح-ه)\sqrt[٣]{ى}$$

ومتى كان الجذران غير متشابهين لا يمكن بيان حاصل جمعهما اوفاضلهما الا بالعلامة

(فى الكلام على ضرب تلك الجذور)

لايجاد حاصل ضرب جذرين متحدى الدرجة تضرب الكميتان الموضوعتان تحت علامتى الجذر في بعضهما ثم يوضع الحاصل تحت علامة الجذر المذكور مثال ذلك

$$\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}=\sqrt{ح\times ى} \quad لان \quad (\sqrt{ح}\times\sqrt{ى})^{٢}=(\sqrt{ح}\times\sqrt{ى})\times(\sqrt{ح}\times\sqrt{ى})=\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}\times\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}=\sqrt{ح}\times\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}\times\sqrt{ى}$$

$=ح\times ى$ اعنى ان مربع $\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}$ يساوى حى فاذن يكون

$\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}=\sqrt{ح\times ى}$ وبهذا يثبت المطلوب

ومثل هذا يجرى فى ايجاد حاصل ضرب جذرين بدرجة ثالثة (وكان يمكن الاستغناء عن اثبات هذه القاعدة بما تقدم فى (بند ٥٤) من أن $\sqrt{ح\times ى}$ $=\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}$ فاذن يقال $\sqrt{ح}\times\sqrt{ى}=\sqrt{ح\times ى}$)

واذا كان للجذرين مكرران يضرب هذان المكرران فى بعضهما ويوضع حاصل ضربهما امام الجذر فحينئذ

$٧\sqrt{ح}$

$\sqrt[٢]{ح} \times ٥ \sqrt{ء} = ٧ \times ٥ \sqrt{ح} \times \sqrt{ء} = ٣٥ \sqrt{ح \times ء}$ و

$٣ح \sqrt{ء} \times ٥ح \sqrt{هـ} = ٣ح \times ٥ح \times \sqrt{ء} \times \sqrt{هـ} = ١٥ح^{٢} \sqrt{ء \times هـ}$

(فى قسمة الجذور)

لتقسيم جذر على اخر متحدين فى الدرجة تقسم احدى الكميتين اللتين تحت علامتى الجذر على الاخرى ويوضع على خارج القسمة علامة الجذر فحينئذ

$\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \sqrt{\frac{ح}{ء}}$ لان $\left(\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}}\right)^{٢} = \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} \times \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \frac{ح}{ء}$

فاذن يكون مربع $\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \frac{ح}{ء}$ ويكون ايضا $\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} = \sqrt{\frac{ح}{ء}}$.

وكذا يقال فيما اذا كان الجذران بدرجة ثالثة

واذا كان للجذرين مكرران يقسم احدهما على الآخر ويوضع خارج قسمتهما امام الجذر فحينئذ

$٢\sqrt{ح} : ٥\sqrt{ء} = \frac{٢}{٥}\sqrt{\frac{ح}{ء}}$ و $٣حء \sqrt[٣]{هـ} : حء \sqrt[٣]{ء} = ٣ح \sqrt[٣]{\frac{هـ}{ء}}$

(٦٣) القواعد التى تقدم بيانها لا توافق حالة ضرب حدين تخيليين ولا حالة تقسيم حد حقيقى على اخر تخيلى

فعلى مقتضى التعريف يكون مربع $\sqrt{-١}$ مساويا -١ أى

$\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$ ومنه يحدث $\frac{١}{\sqrt{-١}} = -\sqrt{-١}$

فينتج من ذلك أن

$\sqrt{-ح} \times \sqrt{-ء} = \sqrt{ح} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{ء} \times \sqrt{-١} =$

$\sqrt{ح} \times \sqrt{ء} \left(\sqrt{-١}\right)^{٢} = -\sqrt{ح \times ء}$

وان $\frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{-ء}} = \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء} \times \sqrt{-١}} = \frac{١}{\sqrt{-١}} \times \frac{\sqrt{ح}}{\sqrt{ء}} =$

$-\sqrt{-١} \times \sqrt{\frac{ح}{ء}} = -\sqrt{-\frac{ح}{ء}}$

(٦٤) اذا كان مقام الكسر اصم فمن المهم تحويله الى منطق
فاذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثانية لزم لتحويله ضرب كل من حدى الكسر فى مقامه فحينئذ

$$\frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{٢}}}=\frac{\text{٣}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}$$

واذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثالثة يكفى لتحويله ان يضرب كل من حدى الكسر فى تربيع هذا المقام فحينئذ

$$\frac{\text{ح}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{ى}}}=\frac{\text{ح}\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{ى}}\right)^{\text{٢}}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{ى}}\times\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{ى}}\right)^{\text{٢}}}=\frac{\text{ح}\sqrt[\text{٣}]{\text{ى}^{\text{٢}}}}{\text{ى}}$$

واذا كان المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدين احدهما أو كلاهما جذر بدرجة ثانية يكفى لتحويله ان يضرب حدا الكسر فى كمية ذات حدين مركبة من الحد الاول من المقام ومن حده الثانى مسبوقا بعلامة مخالفة لعلامته لان من المعلوم أن حاصل ضرب مجموع كميتين فى فاضلهما يساوى فاضل مربعيهما فاذن يكون

$$\frac{\text{ح}}{\text{ع}+\sqrt{\text{ك}}}=\frac{\text{ح}(\text{ع}-\sqrt{\text{ك}})}{(\text{ع}+\sqrt{\text{ك}})(\text{ع}-\sqrt{\text{ك}})}=\frac{\text{ح}(\text{ع}-\sqrt{\text{ك}})}{\text{ع}^{\text{٢}}-\text{ك}}\ \text{و}$$

$$\frac{\text{ح}}{\text{ع}-\sqrt{\text{ك}}}=\frac{\text{ح}(\text{ع}+\sqrt{\text{ك}})}{(\text{ع}-\sqrt{\text{ك}})(\text{ع}+\sqrt{\text{ك}})}=\frac{\text{ح}(\text{ع}+\sqrt{\text{ك}})}{\text{ع}^{\text{٢}}-\text{ك}}\ \text{و}$$

$$\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{ك}}}=\frac{\text{ح}(\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{ك}})}{(\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{ك}})(\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{ك}})}=\frac{\text{ح}(\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{ك}})}{\text{ع}-\text{ك}}\ \text{و}$$

$$\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{ك}}}=\frac{\text{ح}(\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{ك}})}{(\sqrt{\text{ع}}-\sqrt{\text{ك}})(\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{ك}})}=\frac{\text{ح}(\sqrt{\text{ع}}+\sqrt{\text{ك}})}{\text{ع}-\text{ك}}$$

وهذه التحاويل تجرى حين يكون المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدود بعضها أو جميعها جذر بدرجة ثانية مثال ذلك

مقدار

ثم مقدار $\frac{١}{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٧}}$ يمكن اعتبار مقامه كمية ذات حدين حدها الاول $\sqrt{٢}+\sqrt{٣}$ والثانى $-\sqrt{٧}$ فاذا ضرب كل من حدى هذا الكسر فى الكمية ذات الحدين المذكورة بان غيرت علامة حدها الثانى آل

$$\frac{١}{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٧}} \text{ الى } \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٧})(\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧})} =$$

$$\frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{٢+٢\sqrt{٦}+٣-٧} = \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{٢\sqrt{٦}-٢} = \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{٢(\sqrt{٦}-١)}$$

وبضرب حدى هذا الناتج الاخير فى $(\sqrt{٦}+١)$ يحدث

$$\frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{٢(\sqrt{٦}-١)} = \frac{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧})(\sqrt{٦}+١)}{٢(\sqrt{٦}-١)(\sqrt{٦}+١)} =$$

$$\frac{\sqrt{١٢}+\sqrt{١٨}+\sqrt{٤٢}+\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{٢(٦-١)}$$

وباختصاره يحدث

$$= \frac{٢\sqrt{٣}+٣\sqrt{٢}+\sqrt{٤٢}+\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٧}}{١٠}$$

$$\frac{٣\sqrt{٣}+٤\sqrt{٢}+\sqrt{٤٢}+\sqrt{٧}}{١٠}$$

(٦٥) اذا اشتملت متساوية على كميات منطقة وكميات غير منطقة كانت اجزاء المنطقة فى احد الطرفين مساوية لاجزائها فى الطرف الآخر وكذا اجزاء غير المنطقة

فاذا فرضت متساوية $ح+\sqrt{ى} = ه+\sqrt{و}$ وفرض أن $\sqrt{ى}$ و $\sqrt{و}$ غير منطقين وأن ح و ه منطقين كان $ح = ه$ و $\sqrt{ى} = \sqrt{و}$ لانه بتحويل ح الى الطرف الثانى من المتساوية $ح+\sqrt{ى} = ه + \sqrt{و}$ تصير $\sqrt{ى} = ه + \sqrt{و} - ح$

وإذا فرض أن $ه - ح = م$ ورفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية حدث

$$د = م^2 + و + ٢ م \sqrt{و} \quad \text{أو}$$

$$د - م^2 - و = ٢ م \sqrt{و}$$

وهى متساوية مستحيلة لان الكمية المنطقة $د - م^2 - و$ لاتكون مساوية للكمية غير المنطقة $٢ م \sqrt{و}$ الا اذا فرض $م = ٠$

وحيث أن $م = ه - ح$ يكون $ه = ح$ فحيث كان $ه = ح$ ينتج من المتساوية $ح + \sqrt{د} = ه + \sqrt{و}$ وأن $\sqrt{و} = \sqrt{د}$ فحينئذ يكون

$$ح = ه \quad و \quad \sqrt{د} = \sqrt{و}$$

(٦٦) كل مقدار بهذه الصورة $\sqrt{ح} + \sqrt{د}$ يمكن تحويله بالسهولة الى مقدار بهذه الصورة $\sqrt{ح_1 + \sqrt{د_1}}$ بحيث تكون كميات $ح$ و $د$ و $ح_1$ و $د_1$ الداخلة فى هذين المقدارين منطقة

وللوصول الى ذلك ترفع الكمية $\sqrt{ح} + \sqrt{د}$ الى الدرجة الثانية فتصير

$(\sqrt{ح} + \sqrt{د})^2 = ح + د + ٢ \sqrt{ح د}$ ثم يستخرج الجذر التربيعى لكل من الطرفين فيحدث

$$\sqrt{ح} + \sqrt{د} = \sqrt{ح + د + ٢ \sqrt{ح د}} = \sqrt{ح + د + \sqrt{٤ ح د}}$$

وإذا فرض أن $ح + د = ح_1$ و $٤ ح د = د_1$ يحدث

$$\sqrt{ح} + \sqrt{د} = \sqrt{ح_1 + \sqrt{د_1}}$$

وبالعكس يمكن تحويل مقدار $\sqrt{ح_1 + \sqrt{د_1}}$ الى آخر بهذه الصورة

$\sqrt{ح}$

$\sqrt{ح} + \sqrt{ء}$ بحيث تكون كميات ح و ء و $ح_{١}$ و $ء_{١}$ جذرية
وللوصول الى ذلك يربع كل من طرفي المتساوية

$\sqrt{ح} + \sqrt{ء} = \sqrt{ح_{١} + \sqrt{ء_{١}}}$ فيحدث

$ح + ء + ٢\sqrt{حء} = ح_{١} + \sqrt{ء_{١}}$ وبمقتضى ما تقدم في (بند ٦٥) يحدث

$ح + ء = ح_{١} \cdots\cdots (١)$ و $٤حء = ء_{١} \cdots\cdots (٢)$

وإذا ربع كل من طرفي المتساوية (١) وطرح من الناتج المتساوية (٢)

يحدث $ح^{٢} + ء^{٢} - ٢حء = ح_{١}^{٢} - ء_{١}$ ومنها يحدث

$ح - ء = \sqrt{ح_{١}^{٢} - ء_{١}} \cdots\cdots (٣)$

ويحدث أيضا من المتساويتين (١) و (٣)

$ح = \frac{١}{٢} ح_{١} + \frac{١}{٢}\sqrt{ح_{١}^{٢} - ء_{١}}$ و $ء = \frac{١}{٢} ح_{١} - \frac{١}{٢}\sqrt{ح_{١}^{٢} - ء_{١}}$

وحيث فرض أن ح و ء منطقان يلزم أن يكون $ح_{١}^{٢} - ء_{١}$ مربعا كاملا فإذا رمز لهذا المربع بالحرف $هـ^{٢}$ يحدث

$ح = \frac{ح_{١} + هـ}{٢} \cdots\cdots (٤)$ و $ء = \frac{ح_{١} - هـ}{٢} \cdots\cdots (٥)$

أعني انه يلزم لامكان تحويل مقدار $\sqrt{ح_{١} + \sqrt{ء_{١}}}$ الى مقدار بهذه الصورة $\sqrt{ح} + \sqrt{ء}$ أن يكون $ح_{١}^{٢} - ء_{١}$ مربعا كاملا فإذا رمز لهذا المربع بالحرف $هـ^{٢}$ يعلم المقداران ح و ء من القانونين

$$ح = \frac{ح_{١} + هـ}{٢} \quad و \quad ء = \frac{ح_{١} - هـ}{٢}$$

(تنبيه)

قد فرض فى المتساوية $\sqrt{ح} + \sqrt{د} = \sqrt{ح_١ + \sqrt{د_١}}$ ان الجذور
الاربعة موجبة وحيث تقدم ان $ح + د + ٢\sqrt{حد} = ح_١ + \sqrt{د_١}$
ينتج منه ان $٢\sqrt{حد} = \sqrt{د_١}$ فاذن يلزم ان تكون علامتا الجذرين
$٢\sqrt{حد}$ و $\sqrt{د_١}$ متحدتين فتكون علامة $\sqrt{٤حد}$ موجبة اذا كانت
علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{د}$ متحدتين وتكون علامته سالبة اذا كانت علامتا
$\sqrt{ح}$ و $\sqrt{د}$ متخالفتين اعنى اذا كانت علامة $\sqrt{د_١}$ موجبة تكون
علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{د}$ متحدتين واذا كانت علامة $\sqrt{د_١}$ سالبة
تكون علامتا $\sqrt{ح}$ و $\sqrt{د}$ متخالفتين

ولنطبق ماذكرناه على مثالين فنقول

المثال الاول اذا اريد تحويل المقدار $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}}$ الى جذرين
منفردين يكون بمقتضى ماتقدم $ح_١^٢ = ٤٩$ و $د_١ = ٤٠$ ومنه
يحدث $ح_١^٢ - د_١ = ٩$ وحيث أن $ح_١^٢ - د_١ = ٩$ مربع كامل
يمكن تحويل مقدار $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}}$ الى مقدار بهذه الصورة
$\sqrt{ح} + \sqrt{د}$ وحيث تقدم أن $ح_١^٢ - د_١ = هـ^٢$ يكون $هـ^٢ = ٩$،
أو $هـ = ٣$ ويكون ايضا $ح = \frac{٣+٧}{٢} = ٥$ و $د = \frac{٧-٣}{٢} = ٢$
فاذن يكون $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ وتكون
علامتا $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٢}$ متحدتين لان $\sqrt{٤٠}$ له علامة +

المثال الثانى اذا فرض أن المراد تحويل المقدار $\sqrt{٣ - ٢\sqrt{٢}}$ الى
ماذكر يكون بمقتضى ماتقدم $ح_١^٢ = ٩$ و $د_١ = ٨$ و $ح_١^٢ - د_١ = ١$

اعنى

أعنى هـ = ١ فاذن يكون حـ = $\frac{٣+١}{٢}$ = ٢ و ء = $\frac{٣-١}{٢}$ = ١
فحينئذ يكون

$\sqrt{٣-٢\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ − $\sqrt{١}$ = $\sqrt{٢}$ − ١ أعنى
انه يلزم أن تكون علامتا $\sqrt{٢}$ و − ١ متخالفتين لان الحد
٢ $\sqrt{٢}$ له علامة ناقص

(فى المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية)

(فى المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد)

(٦٧) المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هى المحتوية على مجهول أسه الاعظم مساو ٢ وتنقسم المعادلة المذكورة الى معادلة تامة وغير تامة

فغير التامة هى المحتوية على المجهول بدرجة ثانية فقط كمعادلة حـ سـ٢ = ء وتسمى معادلة ذات حدين

والتامة هى المحتوية على المجهول بدرجة اولى وثانية كمعادلة

حـ سـ٢ + ء سـ + هـ = ٠ وتسمى معادلة ذات ثلاثة حدود

(فى المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية)

(٦٨) كل معادلة غير تامة متشعبة كانت أو غير متشعبة يمكن تحويلها الى معادلة بهذه الصورة حـ سـ٢ = ء فيها رمزا حـ و ء يدلان على كميتين صحيحتين سالبتين أو موجبتين ومنها يستخرج سـ٢ = $\frac{ء}{حـ}$ أو سـ = ± $\sqrt{\frac{ء}{حـ}}$ بملاحظة أن الجذر التربيعى لكمية يكون مسبوقا بعلامتى ± فاذا فرض أن م رمز للكسر $\frac{ء}{حـ}$ يكون للمجهول سـ مقداران متساويان ومتخالفان فى العلامة أى

سـ = + $\sqrt{م}$ و سـ = − $\sqrt{م}$

(تنبيه)

لايكون جذر الطرف الثانى مسبوقا بعلامتى $\pm$ وحده بل جذر للطرف الاول كذلك فاذن يحدث $\pm$ س $= \pm \sqrt{م}$ ومنها يحدث أربعة مقادير للمجهول س وهى

$$+ س = + \sqrt{م} \quad و \quad + س = - \sqrt{م} \quad و$$
$$- س = + \sqrt{م} \quad و \quad - س = - \sqrt{م}$$

فاذا غيرت علامتا المقدارين الاخيرين صارا متطابقين مع الاولين الحادثين من مقدارى الجذر التربيعى المسبوق بعلامتى $\pm$ للطرف الثانى فاذن لايكون للمجهول س الامقداران حقيقيان

وتحقيق أن س له مقداران فقط ان يوضع بدل م المقدار $(\sqrt{م})^٢$ عوضا عنه فى المعادلة $س^٢ = \frac{ك}{ح} =$ م فتؤول الى $س^٢ - (\sqrt{م})^٢ = ٠$

وحيث أن $س^٢ - (\sqrt{م})^٢ = (س + \sqrt{م})(س - \sqrt{م})$

يحدث $(س + \sqrt{م})(س - \sqrt{م}) = ٠$

فلاجل أن يكون الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساويا لصفر يلزم أن يكون كل من مضروبى الطرف الاول مساويا لصفر اذا تقرر ذلك توصل الى

$س + \sqrt{م} = ٠$ و $س - \sqrt{م} = ٠$ ومنهما يحدث

$س = - \sqrt{م}$ و $س = + \sqrt{م}$

فالمجهول الداخل فى المعادلة ذات الدرجة الثانية غير التامة يكون له مقداران فقط يسميان جذرى المعادلة وهذان الجذران يكونان متساويين ومتخالفين فى العلامة ويكونان حقيقيين وتخيليين بحسب كون م موجبا أوسالبا

(٦٩) ولنطبق القاعدة المتقدمة على مثالين مخصوصين فنقول المثال الاول ان يفرض أن المطلوب حل هذه المعادلة

$$\frac{س^2+}{س} =$$

فبحذف المقامات يحدث ٤ $س^2$ + ٨ س = ٨ س + ٦٤ + ...

ثم تحول الكميات المعلومة الى الطرف الثانى والمجهولة الى الاول وتختصر الحدود المتشابهة فيحدث

$$س^2 = ١٦ \quad أو \quad س = \pm \sqrt{١٦} = \pm ٤$$

فاذا رمز بالحرفين $س'$ و $س''$ لجذرى المعادلة يكون

$$س' = + ٤ \quad و \quad س'' = - ٤$$

المثال الثانى أن يفرض ان المطلوب حل المعادلة $\frac{ح س - س^2}{ح} = ح + س$

فباجراء العمل كما تقدم فى المثال الاول يحدث

$$ح س - س^2 = ح^2 + ح س \quad أو$$

$$س^2 = - ح^2 \quad أو$$

$$س = \pm \sqrt{-ح^2} = \pm ح \sqrt{-١}$$

أعنى أن جذرى المعادلة يكونان تخيليين

(فى المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية)

(٧٠) كل معادلة تامة بدرجة ثانية يمكن ايلولتها الى هذه الصورة

$ح س^2 + ء س + ه = ٠$ التى فيها الرموز ح و ء و ه تدل على كميات موجبة كانت أو سالبة فاذا قسم كل من طرفى هذه المعادلة على

ح نصير $س^2 + \frac{ء س}{ح} + \frac{ه}{ح} = ٠$

واذا فرض أن $\frac{ء}{ح} = ع$ و $\frac{ه}{ح} = ك$ يحدث

$$س^2 + ع س + ك = ٠$$

ولحل هذه المعادلة يلاحظ انه اذا كانت المعادلة المذكورة بهذه الصورة
$س^٢ + ٢ ح س + ح^٢ = د$ أى أن طرفها الاول مربع كامل للكمية
ذات الحدين $س + ح$ امكن تحويلها الى معادلة بدرجة اولى بان يؤخذ
الجذر التربيعى لكل من طرفيها فحينئذ يسهل حلها

ولتحويل المعادلة $س^٢ + ع س + ك = ٠$ الى الصورة المتقدمة

يحول $ك$ الى الطرف الثانى فتؤول الى $س^٢ + ع س = - ك$

ثم يعتبر $س^٢ + ع س$ حدين لمربع كمية ذات حدين

فيكون $س^٢$ مربع الحد الاول لها و $ع س$ ضعف حاصل
ضرب الحد الاول فى الثانى فيكون الثانى مساويا $\frac{ع س}{٢ س} = \frac{ع}{٢}$ فاذا ضم
الى طرفى المعادلة $س^٢ + ع س = - ك$ مربع الحد $\frac{ع}{٢}$ تحدث
المعادلة

$$س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤} = \frac{ع^٢}{٤} - ك$$

التى طرفها الاول مربع كامل ومساو لمربع الكمية ذات الحدين $س + \frac{ع}{٢}$
فاذا استخرج جذرا طرفيها يحدث

$س + \frac{ع}{٢} = \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$ ومنها يحدث

$$س = - \frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$

وينتج من هذا القانون الاخيران للمجهول $س$ مقدارين فاذا رمز لهما

بالرمزين $س'$ و $س''$ يحدث

$$س' = - \frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك} \quad و \quad س'' = - \frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$

وينتج ايضا من القانون المتقدم انه متى حولت المعادلة التامة ذات الدرجة

الثانية

الثانية الى اخرى بهذه الصورة

$$س^٢ + ع س + ل = ٠$$

يكون مقدار المجهول مساويا لنصف مكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته زائدا أو ناقصا جذر مربع حاصل الجمع الناتج من ضم مربع نصف مكرر الحد الثانى الى الحد المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته

(تنبيه)

قد وضع فى اخذ الجذر التربيعى لطرفى المعادلة

$س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤} = \frac{ع^٢}{٤} - ل$ امام الجذر التربيعى للطرف الثانى العلامة المضاعفة $\pm$ مع انه ينبغى وضعها امام جذر الطرف الاول ايضا لان $س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤}$ مربع الكمية ذات الحدين $- س - \frac{ع}{٢}$ ايضا لكن اذا وضعت العلامة $-$ امام جذر الطرف الاول فالجذران الناتجان للمجهول س يصيران بعد تغيير العلامة عين الجذرين الحادثين من حين وضع علامة $+$ فاذن يكتفى بوضع العلامة المضاعفة $\pm$ امام الجذر التربيعى للطرف الثانى فقط

(تمرينات على حل المعادلات)

(٧١) اذا اريد حل المعادلة الرقمية التى هى $\frac{٥س^٢}{٦} - \frac{س}{٢} + \frac{٣}{٤} = ٨ - \frac{٢س}{٣} - س^٢ + \frac{٢٧٣}{١٢}$ تحول اولا هذه المعادلة الى اخرى بهذه الصورة $س^٢ + ع س + ل = ٠$ ويتوصل الى ذلك بحذف المقامات فيحدث بعد حذفها من المعادلة المذكورة

$$١٠ س^٢ - ٦ س + ٩ = ٩٦ - ٨ س - ١٢ س^٢ + ٢٧٣$$

وبتحويل جميع حدود هذه المعادلة الى الطرف الاول تؤل الى

$٢٢ س^٢ + ٢ س - ٣٦٠ = ٠$ أو $س^٢ + \frac{٢س}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢} = ٠$

وبتطبيق القانون

$س = - \frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}$ على المعادلة المذكورة يحدث

$$س = - \frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١}{٢٢}\right)^٢ + \frac{٣٦٠}{٢٢}}$$

ويمكن حل المعادلة المذكورة $س^٢ + \frac{٢س}{٢٢} - \frac{٣٦٠}{٢٢}$ من اول الامر بان يحول $- \frac{٣٦٠}{٢٢}$ الى الطرف الثانى ويضم لكل من طرفيها $\left(\frac{١}{٢٢}\right)^٢$ وهو مربع نصف مكرر المجهول س فيحدث

$$س^٢ + \frac{٢س}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^٢ = \frac{٣٦٠}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^٢$$

ثم باخذ الجذر التربيعى لكل من طرفيها يحدث

$$س + \frac{١}{٢٢} = \pm \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^٢}$$ ومنها ينتج

$$س = - \frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٢} + \left(\frac{١}{٢٢}\right)^٢}$$

وهو ناتج عين الناتج المتقدم من تطبيق المعادلة المذكورة على القانون العام فلم يبق حينئذ الا اجراء العمليات الحسابية اى تحويل الكسور الموجودة تحت علامة الجذر الى ذات مقام واحد بان يضرب حدا الكسر $\frac{٣٦٠}{٢٢}$ فى ٢٢ ثم يضم الكسران الموجودان تحت العلامة المذكورة الى بعضهما فيحدث $س = - \frac{١}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{٣٦٠ \times ٢٢ + ١}{(٢٢)^٢}}$

فاذا اجريت عملية حساب $٣٦٠ \times ٢٢ + ١$ واخرج العدد $(٢٢)^٢$ من تحت علامة الجذر ولوحظ ان العدد ٢٢ هو المقام المشترك يحدث

$$س = \frac{- ١ \pm \sqrt{٧٩٢١}}{٢٢}$$

وحيث أن الجذر التربيعى للعدد ٧٩٢١ هو ٨٩ يكون

$س =$

$س = \frac{-١ \pm ٨٩}{٢٢}$ واذا وضع كل من جذرى المجهول $س$ على حدته يحدث

$سَ = \frac{-١+٨٩}{٢٢} = \frac{٨٨}{٢٢} = ٤$ و

$سً = \frac{-١-٨٩}{٢٢} = \frac{-٩٠}{٢٢} = \frac{-٤٥}{١١}$

(فى المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية)

(٧٢) قد تقدم فى حل معادلة تامة ذات درجة ثانية ان كل معادلة من هذا القبيل لها جذران وبرهان ذلك ايضا ان يقال كل معادلة تامة ذات درجة ثانية كالمعادلة $س^٢ + ع س + ك = ٠$ يمكن وضعها بهذه الصورة $س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤} = \frac{ع^٢}{٤} - ك$ بتحويل الحد المعلوم $ك$ الى الطرف الثانى واضافة $\frac{ع^٢}{٤}$ الى كل من الطرفين فاذا لوحظ ان الطرف الاول $س^٢ + ع س + \frac{ع^٢}{٤}$ مساو $(س + \frac{ع}{٢})^٢$ وان الطرف الثانى $\frac{ع^٢}{٤} - ك$ مساو $\left(\sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}\right)^٢$ ووضع هذان المقداران فى المعادلة المتقدمة وحول ما كان فى الطرف الثانى الى الاول حدث

$$\left(س + \frac{ع}{٢}\right)^٢ - \left(\sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}\right)^٢ = ٠$$

وحيث أن الطرف الاول مساو لفاضل مربعين يكون مساويا لحاصل ضرب مجموع جذريهما فى فاضلهما اى مساويا

$$\left(س + \frac{ع}{٢} + \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}\right)\left(س + \frac{ع}{٢} - \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}\right) = ٠$$

فحيث أن الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساو للطرف الثانى أى الصفر يلزم أن يكون احد مضروبيه مساويا لصفر وحيث انه محتو على مضروبين تكون المعادلة متحققة بفرض كليهما مساويا للصفر أى

$$س + \frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك} = ٠ \quad و$$

$$س + \frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك} = ٠$$

ويستخرج من ذلك مقدارا المجهول س وهما عينا المقدارين المعلومين سابقا وبهذا يثبت ان كل معادلة تامة بدرجة ثانية لها جذران فقط

(تنبيه)

ينتج من مقارنة المعادلة

$$\left(س + \frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right)\left(س + \frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}\right) = ٠$$

بجذرى المجهول س أن الطرف الاول من معادلة ذات درجة ثانية بهذه الصورة $س^٢ + ح س + ك = ٠$ يكون مركبا من حاصل ضرب كميتين كلتاهما ذات حدين ومحتوية على المجهول س بدرجة اولى فالحدان الاولان منهما يكونان س والاخيران منهما يكونان جذرى س مأخوذين بعلامتين مخالفتين

وينتج من هذه الخاصية طريقة تركيب معادلة ذات درجة ثانية بعد معرفة جذريها هى انه لتركيب معادلة بدرجة ثانية بعد معرفة جذريها ٢ و ـــ ٥ يجعل حاصل ضرب الكميتين ذاتى الحدين س ـــ ٢ و س + ٥ مساويا الصفر فيحدث $س^٢ + ٣ س - ١٠ = ٠$ وهى المعادلة المطلوبة فاذا حلت هذه المعادلة تحصل عدد ٢ و ـــ ٥ وهما جذراها

(٧٣) حيث أن كل جذرى معادلة عامة بدرجة ثانية على هذه الصورة

$$سَ = -\frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك} \quad و \quad سً = -\frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} - ك}$$

يحدث بجمعهما على بعضهما

$$\text{سَ} + \text{سً} = -\frac{\text{ح}}{٢} - \frac{\text{ح}}{٢} = -\text{ح}$$

أعنى أن حاصل جمع جذرى معادلة بدرجة ثانية مساو لمكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته

واذا ضرب الجذران المذكوران فى بعضهما يحدث

$$\text{سَ سً} = \left(-\frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}\right)\left(-\frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}\right)$$

$$= \left(-\frac{\text{ح}}{٢}\right)^٢ - \left(\sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}\right)^٢ = \frac{\text{ح}^٢}{٤} - \frac{\text{ح}^٢}{٤} + \text{ك} = \text{ك}$$

اعنى ان حاصل ضرب جذرى معادلة بدرجة ثانية يساوى حدها المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته ان كان فى الطرف الثانى اوبعلامته ان كان فى الطرف الاول

(تنبيه)

ينتج من هاتين الخاصيتين طريقة تركيب معادلة بعد معرفة جذريها فاذا فرض مثلا أن المطلوب تحصيل معادلة ذات درجة ثانية جذراها ٢ و − ٥ كان حاصل جمع الجذرين المذكورين المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويا ٣ وحاصل ضربهما مساويا − ١٠ وتكون المعادلة المطلوبة $\text{س}^٢ + ٣\,\text{س} - ١٠ = ٠$

(٧٤) جذرا المجهول س المساويان $-\frac{\text{ح}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}$ والمحتويان على علامة الجذر يكونان تخيليين متى كانت الكمية $\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}$ الموضوعة تحت علامة الجذر سالبة وحيث أن $\frac{\text{ح}^٢}{٤}$ مربع كامل تكون علامته موجبة دائما وعلامة $\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}$ لا تتعلق حينئذ الا بعلامة ك من المعادلة $\text{س}^٢ + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك} = ٠$ وبمقدارى ح و ك

فاذا كان $ك$ أصغر من صفر أو سالبا يكون $-ك$ موجبا ويكون أيضا $\frac{ح^{2}}{٤} - ك$ موجبا ويكون الجذران حقيقيين غير متساويين

واذا كان $ك$ مساويا للصفر آلت الكمية الموضوعة تحت علامة الجذر الى $\frac{ح^{2}}{٤}$ وكان الجذران حينئذ حقيقيين

واذا كان $ك$ موجبا يكون $-ك$ سالبا وتكون الكمية التي تحت علامة الجذر $\frac{ح^{2}}{٤} - ك$ مركبة من كمية موجبة وكمية سالبة فعلامة الجذر تتعلق بالمقادير المنسوبة لهاتين الكميتين فاذا كان $ك$ أصغر من $\frac{ح^{2}}{٤}$ كانت الكمية ذات الحدين $\frac{ح^{2}}{٤} - ك$ موجبة والجذران حقيقيين غير متساويين

واذا كان $ك = \frac{ح^{2}}{٤}$ كانت الكمية ذات الحدين التي تحت علامة الجذر مساوية لصفر والجذران حينئذ حقيقيين ومتساويين واذا كان $ك$ أكبر من $\frac{ح^{2}}{٤}$ كانت الكمية ذات الحدين $\frac{ح^{2}}{٤} - ك$ سالبة والجذران تخيليين وهاك جدولا لنتائج هذه المناقشة

اذا كان
- $ك < ٠$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين
- $ك = ٠$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين
- $ك > ٠$ وكان
  - $ك < \frac{ح^{2}}{٤}$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين
  - $ك = \frac{ح^{2}}{٤}$ يكون الجذران حقيقيين ومتساويين
  - $ك > \frac{ح^{2}}{٤}$ يكون الجذران تخيليين

(٧٥) يمكن من اول الامر ادراك علامتي جذري معادلة بهذه الصورة

$س^{2} + ح س + ك = ٠$ وذلك مؤسس على الخاصيتين

$\text{سَ}\,\text{سُ} = \text{ل}$ و $\text{سَ} + \text{سُ} = -\text{ع}$ وبيان ذلك أن يقال

اولا اذا كان ل أصغر من صفر أو سالبا تكون علامتا الجذرين متخالفتين لان حاصل ضربهما سالب وعلامة اكبرهما مخالفة لعلامة ع حيث كان حاصل جمعهما مساويا $-$ ع

وثانيا اذا كان ل مساويا لصفر يكون أحد الجذرين مساويا لصفر لان حاصل ضربهما عدم ويكون الآخر مساويا للمكرر ع بعلامة مخالفة لعلامته

وثالثا اذا كان ل اكبر من صفر او موجبا يكون للجذرين علامة واحدة حيث كان حاصل ضربهما موجبا وتكون علامتاهما مخالفة أيضا لعلامة ع ويمكن استنتاج ذلك من المقدارين

$$\text{سَ} = -\frac{\text{ع}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ع}^٢}{٤} - \text{ل}} \quad \text{و} \quad \text{سُ} = -\frac{\text{ع}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ع}^٢}{٤} - \text{ل}}$$

وهاك جدولا يحتوى على النتائج الحادثة من المناقشة المتقدمة

اذا كان:

- $\text{ل} < ٠$ تكون علامتا الجذرين متخالفتين لكن ان كان { $\text{ع} < ٠$ كان اكبرهما موجبا ، $\text{ع} > ٠$ كان اكبرهما سالبا }
- $\text{ل} = ٠$ يكون احد الجذرين صفرا والآخر مساويا $-$ ع
- $\text{ل} > ٠$ تكون علامتا الجذرين متحدتين لكن ان كان { $\text{ع} < ٠$ يكون الجذران موجبين ، $\text{ع} > ٠$ يكون الجذران سالبين }

(٧٦) لم يبق علينا الآن تمحن بعض حالات خاصة فنقول

اولا قد شوهد فيما تقدم فى الحالة التى كان فيها ل اكبر من صفر ومساويا $\frac{\text{ع}^٢}{٤}$ أن الجذرين متساويان وذلك بمقتضى قانون

$\text{س} = -\frac{\text{ع}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ع}^٢}{٤} - \text{ل}}$ لكن يمكن البرهنة على ذلك من اول الامر بان يوضع فى المعادلة $\text{س}^٢ + \text{ع}\,\text{س} + \text{ل} = ٠$ بدل ل مقداره

فتصير $سَ^٢ + ع سَ + \frac{ع^٢}{٤} = ٠$ وهى معادلة يمكن وضعها بهذه الصورة $(سَ + \frac{ع}{٢})^٢ = ٠$ ومنها يحدث

$$(س + \frac{ع}{٢})(س + \frac{ع}{٢}) = ٠$$

وهى معادلة تتحقق بالفرضين $س + \frac{ع}{٢} = ٠$ و $سَ + \frac{ع}{٢} = ٠$ المتطابقين ومنها يستخرج الجذران $س = -\frac{ع}{٢}$ و $س = -\frac{ع}{٢}$ المتساويان

وثانيا قد شوهد فيما تقدم فى الحالة التى كان فيها $ك = ٠$ أن أحد الجذرين مساو صفرا والاخر مساو $-ع$ ويمكن حدوث ذلك من القانون

$$س = -\frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$$ اومن الارتباطين

$سَ سً = ك$ و $سَ + سً = -ع$ لكن يمكن استنتاج ذلك من اول الامر من المعادلة $سَ^٢ + ع س + ك = ٠$ لانه اذا فرض فيها $ك = ٠$ تؤل الى $س^٢ + ع سَ = ٠$ واذا وضع فيها $س$ مضروبا مشتركا آلت الى $س(س + ع) = ٠$ وهى معادلة تتحقق بالفرضين $س = ٠$ و $س + ع = ٠$ اللذين يستخرج منهما $س = ٠$ و $سَ = -ع$

وثالثا اذا فرض $ع = ٠$ فى القانون $سَ = -\frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع^٢}{٤} - ك}$ آل الى $س = \pm\sqrt{-ك}$ اعنى أن جذرى المجهول $س$ يكونان متساويين ومتخالفين فى العلامة لكن يمكن استنتاج ذلك من المعادلة $سَ^٢ + ع س + ك = ٠$ التى تؤل فى هذه الحالة الى معادلة غير تامة بهذه الصورة

$سَ^٢ + ك = ٠$ ومنها يستخرج $س = \pm\sqrt{-ك}$

ورابعا

ورابعا اذا فرض أن $ك = ٠$ و $ح = ٠$ فى ان واحد فى القانون

$$س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك}$$ أو فى الارتباطين

$س + سَ = -ح$ و $س سَ = ك$ او فى المعادلة

$س^{٢} + ح س + ك = ٠$ يكون جذرا المجهول $س$ مساويين لصفر

(٧٧) ولنطبق القواعد العمومية على مناقشة بعض امثلة خصوصية فنقول

المثال الاول اذا فرضت معادلة $٣ س^{٢} + س - ٢ = ٠$ وقسم

طرفاها على مكرر $س^{٢}$ التالى .

$$س^{٢} + \frac{س}{٣} - \frac{٢}{٣} = ٠$$

وحيث ان الحد المعلوم سالب فالجذران يكونان حقيقيين غير متساويين وبناء عليه يكونان مخالفين فى العلامة لان حاصل ضربهما يكون سالبا وايضا حيث كان مكرر الحد الثانى موجبا يكون حاصل جمع الجذرين سالبا وبناء عليه يكون اكبرهما سالبا فحينئذ جذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومخالفى لعلامة واكبرهما سالبا

ولتحقيق ذلك يستخرج مقدارا المجهول $س$ من المعادلة المعلومة فيحدث

$$س = -\frac{١}{٦} \pm \sqrt{\frac{١}{٣٦} + \frac{٢}{٣}} = \frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٢٤}}{٦} = \frac{-١ \pm \sqrt{٢٥}}{٦}$$

$$= \frac{-١ \pm ٥}{٦}$$ ومنه يستخرج

$$س = \frac{-١ + ٥}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} \quad و \quad سَ = \frac{-١ - ٥}{٦} = -١$$

المثال الثانى اذا فرضت معادلة ٦ س^٢ − ٥ س + ١ = ٠

وقسمت حدودها على ٦ آلت الى س^٢ − ٥س/٦ + ١/٦ = ٠

وحيث أن الحد المعلوم موجب يلزم مقارنته بمربع نصف مكرر الحد الثانى أعنى مربع ٥/١٢ ومن حيث أن مربع ٥/١٢ يساوى ٢٥/١٤٤ يلزم مقارنة كسرى ٢٥/١٤٤ و ١/٦ بأن يضرب حدا الكسر ١/٦ فى ٢٤ فيؤل الى ٢٤/١٤٤ وحيث أن الكسر ٢٤/١٤٤ أصغر من ٢٥/١٤٤ أى أن الحد المعلوم أصغر من مربع نصف مكرر الحد الثانى يكون جذرا المعادلة حقيقيين غير متساويين ومن حيث أن حاصل ضربهما موجب وهو ١/٦ يكونان متحدين فى العلامة ومن حيث أن حاصل جمعهما وهو ٥/٦ موجب ايضا يكونان موجبين فحينئذ يكون الجذران حقيقيين موجبين وغير متساويين لانه من القانون

س = ٥/١٢ ± √(٢٥/١٤٤ − ١/٦) = (٥ ± √(٢٥−٢٤))/١٢ = (٥ ± ١)/١٢

يحدث

سَ = (٥+١)/١٢ = ٦/١٢ = ١/٢ و سً = (٥−١)/١٢ = ٤/١٢ = ١/٣

المثال الثالث اذا فرضت معادلة س^٢ + ١٤ س + ٤٩ = ٠

وقورن حدها المعلوم الموجب المساوى ٤٩ بمربع نصف مكرر الحد الثانى أى مربع ٧ يكون ٤٩ مساويا لهذا المربع فاذن يكون الجذران حقيقيين ومتساويين وكل منهما مساويا للنصف مكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته أعنى أن كل جذر يكون مساويا − ٧ لان

س = − ٧ ± √(٤٩−٤٩) = − ٧

المثال الرابع اذا فرضت معادلة س^٢ + ح س + ح^٢ = ٠ وقورن حدها المعلوم ح^٢ بمربع نصف مكرر الحد الثانى أعنى ح^٢/٤ يكون ح^٢

اكبر

اكبر من $\frac{ح^2}{٤}$ ويكون جذرا المعادلة تخيليين لان

$$س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - ح^2} = \frac{-ح \pm \sqrt{-٣ح^2}}{٢} = \frac{-ح \pm ح\sqrt{-٣}}{٢}$$
$$= \frac{ح(-١ \pm \sqrt{-٣})}{٢}$$

(٧٨) قد تقدم انه يجب لحل معادلة كمعادلة $ح س^2 + ء س + هـ = ٠$

أن تقسم جميع حدودها على $ح$ فيحدث $س^2 + \frac{ء س}{ح} + \frac{هـ}{ح} = ٠$

وأن يختصر الحساب بفرض $\frac{ء}{ح} = ع$ و $\frac{هـ}{ح} = ك$ فلو اريد الآن

حل المعادلة المذكورة بدون اجراء هذا الفرض حول $\frac{هـ}{ح}$ الى الطرف

الثاني فيحدث $س^2 + \frac{ء س}{ح} = -\frac{هـ}{ح}$ ولتتميم مربع الطرف الاول

يضاف لكل من طرفيها مربع نصف $\frac{ء}{ح}$ فيحدث

$$س^2 + \frac{ء س}{ح} + \frac{ء^2}{٤ح^2} = \frac{ء^2}{٤ح^2} - \frac{هـ}{ح}$$

وباخذ جذر كل من الطرفين يحدث

$$س + \frac{ء}{٢ح} = \pm \sqrt{\frac{ء^2}{٤ح^2} - \frac{هـ}{ح}}$$ ومنها يحدث

$$س = -\frac{ء}{٢ح} \pm \sqrt{\frac{ء^2}{٤ح^2} - \frac{هـ}{ح}} = \frac{-ء \pm \sqrt{ء^2 - ٤ح هـ}}{٢ح}$$

فاذا رمز لجذري المجهول $س$ بالرمزين $سَ$ و $سً$ يحدث

$$سَ = \frac{-ء + \sqrt{ء^2 - ٤ح هـ}}{٢ح} \quad و \quad سً = \frac{-ء - \sqrt{ء^2 - ٤ح هـ}}{٢ح}$$

(٧٩) ولنختبر ما يؤول اليه هذان المقداران حين يفرض فيهما المكرر $ح$

مساويا للصفر فيحدث بناء عليه

$$سَ = \frac{-ء + ء}{٠} = \frac{٠}{٠} \quad و \quad سً = \frac{-ء - ء}{٠} = \frac{-٢ء}{٠}$$

أعنى أن مقدار سً يكون لانهائيا ومقدار سَ الذى بهذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ يدل على أنه غير معين لكن استنتاج هذا المقدار فى هذه الحالة حادث من وجود مضروب مشترك لحدى الكسر

$\frac{-ى+\sqrt{ى^{٢}-٤حه}}{٢ح}$ ولتعيين هذا المضروب يضرب حدا الكسر فى

$-ى-\sqrt{ى^{٢}-٤حه}$ فيحدث

$$سَ=\frac{\left(-ى+\sqrt{ى^{٢}-٤حه}\right)\left(-ى-\sqrt{ى^{٢}-٤حه}\right)}{٢ح\left(-ى-\sqrt{ى^{٢}-٤حه}\right)}=$$

$$\frac{ى^{٢}-ى^{٢}+٤حه}{٢ح\left(-ى-\sqrt{ى^{٢}-٤حه}\right)}=\frac{٤حه}{٢ح\left(-ى-\sqrt{ى^{٢}-٤حه}\right)}$$

وحيث أن كلا من حدى هذا الكسر الاخير يقبل القسمة على ٢ح يكون ٢ح هو المضروب المشترك ويحدث بعد حذفه

$$سَ=\frac{٢ه}{-ى-\sqrt{ى^{٢}-٤حه}}$$

فاذا فرض الآن أن ح = ٠ ينتج

$$سَ=\frac{٢ه}{-ى-ى}=\frac{٢ه}{-٢ى}=-\frac{ه}{ى}\quad \text{أى}\quad سَ=-\frac{ه}{ى}$$

وأما مقدار سً فهو لانهائى لانه بفرض ح = ٠ تؤل المعادلة

$حس^{٢}+ىس+ه=٠$ الى معادلة ذات درجة اولى $ىس+ه=٠$ لاتحقق الا بمقدار واحد وهو $س=-\frac{ه}{ى}$ وحيث ثبت ان مقدار سَ معين ينتج من ذلك أن مقدار سً لانهائى

(فى مسائل الدرجة الثانية)

(المسئلة الاولى)

(٨٠) ما هو العدد القاسم ٣٦ بحيث يكون خارج القسمة زائدا المقسوم عليه مساويا ١٥

فالجواب

فالجواب ان يفرض ان العدد المجهول سـ فخارج قسمة ٣٦ على سـ يكون هكذا $\frac{٣٦}{سـ}$ فاذن تحدث هذه المعادلة $\frac{٣٦}{سـ} + سـ = ١٥$

ومنها يحدث $٣٦ + سـ^٢ = ١٥ سـ$ أو $سـ^٢ - ١٥ سـ + ٣٦ = ٠$ ومنها يحدث

$$سـ = \frac{١٥}{٢} \pm \sqrt{\frac{٢٢٥}{٤} - ٣٦} = \frac{١٥ \pm \sqrt{٢٢٥ - ١٤٤}}{٢} = \frac{١٥ \pm ٩}{٢}$$

فاذن يكون مقدارا سـ هكذا

$$سـَ = \frac{١٥ + ٩}{٢} = ١٢ \quad و \quad سـً = \frac{١٥ - ٩}{٢} = ٣$$

فكل من مقدارى سـَ $= ١٢$ و سـً $= ٣$ يحقق منطوق المسئلة

(المسئلة الثانية)

(٨١) اذا كان المطلوب تقسيم ح الى جزئين يكون احدهما وسطا هندسيا بين ح الكلى والجزء الآخر يقال

لحل ذلك يرمز بالحرف سـ لجزء ح الذى يكون وسطا متناسبا فيكون الجزء الآخر مساويا ح ـ سـ فاذن يكون

$$ح : سـ :: سـ : ح - سـ$$ ومنه يحدث

$$سـ^٢ = ح^٢ - ح سـ$$ أو

$$سـ^٢ + ح سـ - ح^٢ = ٠$$ ومنها يحدث

$$سـ = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} + ح^٢} = \frac{-ح \pm \sqrt{٥ ح^٢}}{٢} = \frac{-ح \pm ح \sqrt{٥}}{٢}$$

فاذن يكون مقدارا سـ هكذا

$$سـَ = \frac{-ح + ح\sqrt{٥}}{٢} = \frac{ح(-١ + \sqrt{٥})}{٢} \quad و$$

$$سـً = \frac{-ح - ح\sqrt{٥}}{٢} = \frac{-ح(١ + \sqrt{٥})}{٢}$$

فمقدار سـَ يليق بمنطوق المسئلة وأما مقدار سـً فغير لائق به لانه مقدار

سالب فيقطع النظر عنه فحينئذ يكون للمسئلة حل واحد هو

$$س = \frac{ح(-١ + \sqrt{٥})}{٢}$$

(تنبيهان)

الاول مقدار $س = \frac{ح(-١ + \sqrt{٥})}{٢}$ يكون أصم مهما كان ح
لان اجراء عملية الحساب على عدد مخصوص لا يوصل الى مقدار صحيح
للمجهول س

الثانى قد استخرج فيما تقدم من المعادلة ذات الدرجة الثانية الجذران

$$س = \frac{ح(-١ + \sqrt{٥})}{٢} \quad و \quad س = \frac{-ح(١ + \sqrt{٥})}{٢}$$

اللذان يكون كل منهما محققا للمعادلة غير أن أحدهما يليق بمنطوق المسئلة
المفروضة ويؤخذ من ذلك أن هذه المعادلة كناية عن مسئلة تكون المسئلة التى
حلت سابقا حالة خصوصية منها ومنطوقها هكذا

المطلوب ايجاد عددين حاصل جمعهما مساو ح واحدهما وسط هندسى
بين الآخر و ح

فاذا رمز بالحرف س لاحد العددين المجهولين الذى هو كناية عن الوسط
الهندسى توصل الى هذه المعادلة

$$س^٢ + ح س - ح^٢ = ٠$$

التى جذرها السالب يكون موافقا لمنطوق المسئلة كجذرها الموجب

(المسئلة الثالثة)

(٨٢) المطلوب كتابة عدد ٣١٧ فى جملة تعدادية بحيث تكون ارقامه
٦ و ٣ و ٢

فيفرض أن س رمز للاساس المجهول للجملة فالستة آحاد من الرتبة
الثالثة للعدد المفروض تكافى ٦ س^٢ والثلاثة آحاد من الرتبة الثانية
تكافى ٣ س فالعدد المعلوم يكافى

٦ س^٢

$$\text{٦ س}^{٢} + \text{٣ س} + \text{٢} = \text{[illegible]}$$

$$\text{٦ س}^{٢} + \text{٣ س} + \text{٢} = \text{٣١٧} \quad \text{أو}$$

$$\text{٦ س}^{٢} + \text{٣ س} - \text{٣١٥} = \text{٠} \quad \text{أو}$$

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{س}}{\text{٢}} - \frac{\text{١٠٥}}{\text{٢}} = \text{٠} \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$\text{س} = -\frac{\text{١}}{\text{٤}} \pm \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{١٦}} + \frac{\text{١٠٥}}{\text{٢}}} = \frac{-\text{١} \pm \sqrt{\text{١} + \text{٨٤٠}}}{\text{٤}} = \frac{-\text{١} \pm \text{٢٩}}{\text{٤}}$$

ومقدارا س يكونان

$$\text{س}' = \frac{-\text{١} + \text{٢٩}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢٨}}{\text{٤}} = \text{٧} \quad \text{و} \quad \text{س}'' = \frac{-\text{١} - \text{٢٩}}{\text{٤}} = -\frac{\text{١٥}}{\text{٢}}$$

فيقطع النظر عن المقدار $\text{س}'' = -\frac{\text{١٥}}{\text{٢}}$ لان اساس الجملة التعدادية لا يكون سالبا ولا يوافق المسئلة فاذن يكتفى بجذرها الموجب

(المسئلة الرابعة)

(٨٣) اذا كان المطلوب تقسيم العدد ١٠ الى جزئين حاصل ضربهما يساوى ٢٨ فالجواب أن يقال

لحل هذه المسئلة توضع على هيئة معادلة كالعادة لكن يتذكر أن حاصل جمع جذرى معادلة ذات درجة ثانية يكون مساويا المكرر الحد الثانى بعلامة مخالفة لعلامته وأن حاصل ضربهما يكون مساويا للحد المعلوم يكون العددان المطلوبان جذرى معادلة ذات درجة ثانية مكرر حدها الثانى مساو −١٠ والحد المعلوم مساو ٢٨ فتكون المعادلة هكذا

$$\text{س}^{٢} - \text{١٠ س} + \text{٢٨} = \text{٠}$$

فجذرا هذه المعادلة يكونان تخيليين لان الحد المعلوم موجب واكبر من مربع نصف ١٠ فحينئذ تكون المسئلة المفروضة غير ممكنة الحل

ولمناقشة هذه المسئلة بطريقة عامة وبيان احوالها الممكنة وغير الممكنة

يفرض أن ح رمز للعدد الذى يراد تقسيمه وان م رمز لحاصل ضرب جزئيه فيكون العددان المجهولان مبينين بجذرى المعادلة

$$\text{س}^2 - \text{ح}\,\text{س} + \text{م} = 0$$

التى يستخرج منها $\text{سَ} = \frac{\text{ح}}{2} + \sqrt{\frac{\text{ح}^2}{4} - \text{م}}$ و $\text{سُ} = \frac{\text{ح}}{2} - \sqrt{\frac{\text{ح}^2}{4} - \text{م}}$

فاذا كان $\text{م} > \frac{\text{ح}^2}{4}$ كان هذان المقداران تخيليين فحينئذ تكون المسئلة غير ممكنة الحل

واذا كان $\text{م} = \frac{\text{ح}^2}{4}$ كان هذان الجذران حقيقيين وكل منهما مساويا $\frac{\text{ح}}{2}$ أعنى أن عدد ح يكون مقسوما فى هذه الحالة قسمين متساويين

واذا كان $\text{م} < \frac{\text{ح}^2}{4}$ كان هذان المقداران حقيقيين غير متساويين ويصغر الفرق بينهما المساوى $2\sqrt{\frac{\text{ح}^2}{4} - \text{م}}$ كلما كبر مقدار م وينتج من ذلك نتائج هى

انه متى قسم العدد الى قسمين مختلفين وضربا فى بعضهما كان حاصل الضرب اكبر من العدد المذكور حين يكون الفرق بين الجزئين المختلفين قليلا ويكون هذا الحاصل اكبر ما يكون متى كان الجزآن المختلفان متساويين اعنى متى انقسم العدد المذكور الى قسمين متساويين

(المسئلة الخامسة)

(٨٤) ضوآن موضوعان أحدهما فى النقطة ا والآخر فى ب ومرموز للبعد اب الكائن بينهما بالحرف ء ولشدة الضوء ا بالحرف م ولشدة الآخر الكائن فى ب بالحرف ن والمطلوب تعيين النقطة الكائنة على المستقيم اب التى فيها نور الضوئين واحد وحيث فرضنا م و ن رمزين لشدتى الضوئين بالنسبة لوحدة البعد نذكر ايضا قاعدة معلومة هى أن شدتى ضوء واحد واقع فى نقطتين على ابعاد غير متساوية

تكونان

تكونان مناسبتين لعكس مربعي بعدي هاتين النقطتين عن هذا الضوء

ح ب ح ع ب

فلحل ذلك يفرض أن ح النقطة المطلوبة ثم يرمز بالحرف س للبعد اح فيكون ب ح مساويا ى — س وحيث أن م شدة الضوء ا بالنسبة لوحدة البعد تكون $\frac{م}{س^٢}$ الشدة في النقطة ح بالنسبة للبعد س ومثل ذلك يقال في شدة الضوء ب في ح الكائنة على بعد مساو ى — س تكون $\frac{ن}{(ى-س)^٢}$ وحيث لزم ان تكون ح مستنيرة بنور واحد من الضوئين المذكورين يكون

$$\frac{م}{س^٢}=\frac{ن}{(ى-س)^٢}$$

فاذا احل مربع الكمية ذات الحدين ى — س وسلكت الطريقة العمومية لحل المعادلات تحصل

$$م ى^٢ - ٢ م ى س + م س^٢ = ن س^٢ \quad أو$$

$$(م-ن) س^٢ - ٢ م ى س + م ى^٢ = ٠ \quad أو$$

$$س^٢ - \frac{٢ م ى س}{م-ن} + \frac{م ى^٢}{م-ن} = ٠ \quad ومنها يستخرج$$

$$س = \frac{م ى}{م-ن} \pm \sqrt{\frac{م^٢ ى^٢}{(م-ن)^٢} - \frac{م ى^٢}{م-ن}} = \frac{م ى \pm \sqrt{م^٢ ى^٢ - م^٢ ى^٢ + م ن ى^٢}}{م-ن}$$

$$= \frac{م ى \pm ى \sqrt{م ن}}{م-ن}$$

فجذرا س يكونان هكذا

$$\left.\begin{array}{l} س' = \frac{ى(م+\sqrt{م ن})}{م-ن} \quad و \\ س'' = \frac{ى(م-\sqrt{م ن})}{م-ن} \end{array}\right\} \cdots (١)$$

ويمكن حل المعادلة $\frac{م}{س^٢}=\frac{ن}{(ى-س)^٢}$ بطريقة اسرع من السابقة بان

يستخرج من اول الامر جذر طرفيها فيحدث

$$\frac{\sqrt{م}}{س} = \frac{\pm\sqrt{ن}}{د - س}$$ أو

$$د\sqrt{م} - س\sqrt{م} = \pm س\sqrt{ن}$$ أو

$$(\sqrt{م} \pm \sqrt{ن})\, س = د\sqrt{م}$$ أو

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} \pm \sqrt{ن}}$$

فاذا استخرج منها مقدارا س يكونان بهذه الكيفية

$$س' = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}}$$

و $$س'' = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

ويسهل حساب البعد سح أعني د − س بان يقال

$$د - س = د - \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} \pm \sqrt{ن}} = \frac{د\sqrt{م} \pm د\sqrt{ن} - د\sqrt{م}}{\sqrt{م} \pm \sqrt{ن}} = \frac{\pm د\sqrt{ن}}{\sqrt{م} \pm \sqrt{ن}}$$

ولتعيين مقداري د − س تؤخذ العلامتان العلويتان أو السفليتان فاذن يكون

$$د - س' = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}} \quad و \quad د - س'' = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$$

وتكون جملتا مقداري مجهولي س و د − س هكذا

$$س' = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}} \quad و \quad س'' = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$$

$$د - س' = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}} \quad و \quad د - س'' = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$$

(تنبيه)

صورة مقداري س' و س'' المبينين بمعادلتي (٢) ليست كصورة مقداري (١) الحادثين من الحل الاول ومع ذلك فهذان المقداران عينا

الاولين

الأولين وبرهان ذلك ان يغير في بسط $\text{س} = \frac{\text{د}(\text{م} + \sqrt{\text{م ن}})}{\text{م} - \text{ن}}$ المقدار م بالمقدار $\sqrt{\text{م}} \times \sqrt{\text{م}}$ ثم يوضع $\sqrt{\text{م}}$ مضروبا مشتركا فيؤل الى

$$\text{س} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}(\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}})}{\text{م} - \text{ن}}$$

فاذا اعتبر مقدارا م و ن مربعي مقداري $\sqrt{\text{م}}$ و $\sqrt{\text{ن}}$ يكون المقام مكونا من فاضل مربعين فاذن يكون

$$\text{س} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}(\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}})}{(\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}})(\sqrt{\text{م}} - \sqrt{\text{ن}})} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}} - \sqrt{\text{ن}}}$$

وهو مقدار مساو لمقدار س المستخرج بالحل الثاني ومثل هذا يقال في اثبات تساوي المقدارين الاخيرين

(مناقشات)

الاولى اذا فرض ان $\text{م} > \text{ن}$ يكون مقدار $\text{س} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}}}$ موجبا واكبر من $\frac{\text{د}}{٢}$ لان المقام $\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}}$ اصغر من $٢\sqrt{\text{م}}$ لان $\text{م} > \text{ن}$ فاذن يكون الكسر $\frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}}}$ اكبر من الكسر $\frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{٢\sqrt{\text{م}}}$ أو من $\frac{\text{د}}{٢}$ ويكون مقدار د − س المطابق لمقدار س موجبا ايضا غير انه اصغر من $\frac{\text{د}}{٢}$ فاذن توجد نقطة كنقطة ح مستنيرة بنور واحد من الضوئين ا و ب وتكون اقرب الى ب من ا وهذا يوافق فرض $\text{م} > \text{ن}$

ومقدار $\text{س} = \frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}} - \sqrt{\text{ن}}}$ يكون موجبا ايضا حيث ان $\text{م} > \text{ن}$ ويكون اكبر من د لان المقام $\sqrt{\text{م}} - \sqrt{\text{ن}}$ اصغر من $\sqrt{\text{م}}$ فاذن يكون الكسر $\frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}} - \sqrt{\text{ن}}}$ اكبر من $\frac{\text{د}\sqrt{\text{م}}}{\sqrt{\text{م}}}$ أو من د ومقدار

ء ـ سَ = $\frac{ء\sqrt{ح}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$ المطابق للاول يكون سالبا لان بسطه سالب ومقامه موجب أو يقال حيث أن سَ اكبر من ء يكون ء ـ سَ بالضرورة سالبا فاذن يوجد على المستقيم ا ب نقطة ثانية حَ مستنيرة بنور واحد من الضوئين المفروضين وتكون على يمين النقطة ب لان بعدها عن ا اكبر من ء وهذا الناتج يوافق ايضا م > ن

الثانية اذا فرض أن م < ن يكون مقدار سَ = $\frac{ء\sqrt{م}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$ موجبا غير انه بواسطة برهان كالمتقدم فى الحالة السابقة يبرهن على أن سَ يكون أصغر من $\frac{ء}{٢}$ وان المقدار المطابق له وهو ء ـ سَ = $\frac{ء\sqrt{ن}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$ موجبا واكبر من $\frac{ء}{٢}$ فاذن تكون النقطة الاولى مستنيرة بنور واحد من الضوئين الموضوعين فى النقطتين ا و ب واقرب الى النقطة ا من ب وهذا يوافق فرض م < ن

حَ ا ح ب

والمقدار الثانى وهو سً = $\frac{ء\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$ يكون سالبا لان بسطه موجب ومقامه سالب ولتوضيح هذا المقدار كما فى النوع الثانى من (بند ٤٧) يغير فى المعادلة

$\frac{م}{س^٢} = \frac{ن}{(ء-س)^٢}$ علامة س فتؤل الى $\frac{م}{س^٢} = \frac{ن}{(ء+س)^٢}$ لانه بالعنونة عن هذه المعادلة يتوصل الى منطوق المسئلة المفروضة بدون تغيير غير ان هذه المعادلة يعلم منها ان النقطة المستنيرة بنور واحد من الضوئين يكون بعدها عن النقطة ب اكبر من ء فحينئذ تكون النقطة الثانية حَ

المستنيرة

المستنيرة بنور واحد من الضوئين على يسار النقطة ا وبعدها عنها مبينا
بمقدار سالب هو س = $\frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$ لان جذوري المعادلة المغيرة عين
جذوري المعادلة المفروضة وأما المقدار المطابق لمقدار س = $\frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$
وهو

$$د - س = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$$ فيمكن وضعه بهذه الصورة

$$د - س = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{ن}-\sqrt{م}}$$

وحينئذ تسهل البرهنة على انه موجب واكبر من د وهذا الناتج يوافق
وضع النقطة ح المعين سابقا وفرض $ن < م$
الثالثة اذا فرض أن م = ن كان مقدارا

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}} \quad و \quad د - س = \frac{د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$$ موجبين

ومساويا كل منهما $\frac{د}{٢}$ وكانت النقطة الاولى المستنيرة بنور واحد من
الضوئين على بعدين متساويين من النقطتين ا و ب وهذا الناتج يوافق
فرض م = ن
وأما المقداران الآخران اللذان هما

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}} \quad و \quad د - س = \frac{-د\sqrt{ن}}{\sqrt{م}-\sqrt{ن}}$$ فيؤلان الى

$$س = \frac{د\sqrt{م}}{٠} \quad و \quad د - س = \frac{-د\sqrt{ن}}{٠}$$ وهما مقداران

لانهائيين
(انظر المناقشة الثالثة من بند ٤٥) وحينئذ تكون النقطة المستنيرة بنور
واحد من الضوئين على بعد لانهائي من النقطتين ا و ب اعني لاوجود لها
لان فرض م = ن لا ينتج نقطة اخرى مستنيرة بنور واحد على المستقيم

ا ـ لا على يمين نقطة ـ ولا على شمال نقطة ا

الرابعة اذا فرض ان $م = ن$ و $ء = ٠$ فى آن واحد آل مقدارا

$$س = \frac{ء \sqrt{م}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}} \quad و \quad ء - س = \frac{ء \sqrt{ن}}{\sqrt{م} + \sqrt{ن}}$$ الى

$$\frac{٠}{٢\sqrt{م}} = ٠$$

فالحل الاول للمسئلة هو النقطة التى وضع فيها الضوآن واما المقداران الآخران اللذان هما

$$س = \frac{ء \sqrt{م}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}} \quad و \quad ء - س = \frac{- ء \sqrt{ن}}{\sqrt{م} - \sqrt{ن}}$$

فيؤلان الى $\frac{٠}{٠}$ اعنى انهما غير معينين وحينئذ تكون جميع نقط المستقيم ا ـ المار بالنقطة الموضوع فيها الضوآن مستنيرة بنور واحد من الضوئين وهذا الناتج موافق لما فرضناه من ان الضوئين فى نقطة واحدة وان شدتهما واحدة

(فى المعادلات التى يمكن حلها بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية)

(٨٥) فحل المعادلات ذات الدرجة الثالثة الخالية عن الحد المعلوم بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية فلحل المعادلة العمومية

$$س^{٣} + ح س^{٢} + ك س = ٠$$

يوضع س مضروبا مشتركا فيها فتؤل الى المعادلة

$$س (س^{٢} + ح س + ك) = ٠$$

وحيث أن طرفها الاول المحتوى على حاصل ضرب مضروبين مساو للطرف الثانى اى الصفر يكفى لتحقيقها فرض احد المضروبين مساويا لصفر وحينئذ تكون المعادلة متحققة بفرض $س = ٠$ أو

$$س^{٢} + ح س + ك = ٠$$ الذى يحدث منه

$$س = - \frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك} \quad و \quad س = - \frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^{٢}}{٤} - ك}$$

وبالجملة

وبالجملة فيكون للمجهول سـ ثلاثة مقادير هي

$$\text{سَ} = -\frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}} \quad \text{و} \quad \text{سً} = -\frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}} \quad \text{و} \quad \text{سٍ} = ٠$$

ويمكن حل المعادلة $\text{سـ}^٤ + \text{ح}\,\text{سـ}^٣ + \text{ك}\,\text{سـ}^٢ = ٠$ ذات الدرجة الرابعة غير المحتوية على الحد المعلوم والحد المجهول بدرجة اولى بحل نظير المتقدم

(٨٦) المعادلة المضاعفة التربيع معادلة لا تحتوى الا على المجاهيل بدرجات مزدوجة وتحل المعادلة المضاعفة التربيع ذات الدرجة الرابعة بواسطة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية فلحل المعادلة العمومية

$$\text{سـ}^٤ + \text{ح}\,\text{سـ}^٢ + \text{ك} = ٠$$

يجعل $\text{سـ}^٢ = \text{صـ}$ ومنه يستخرج $\text{سـ} = \pm\sqrt{\text{صـ}}$ ثم يوضع في المعادلة المفروضة بدل سـ مقداره فتؤول الى

$$\text{صـ}^٢ + \text{ح}\,\text{صـ} + \text{ك} = ٠$$

ومنها يحدث

$$\text{صـ} = -\frac{\text{ح}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}$$

واذا وضع على التعاقب بدل صـ مقداره في $\text{سـ} = \pm\sqrt{\text{صـ}}$

حدث $\text{سـ} = \pm\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}}$ و $\text{سـ} = \pm\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}}$

فاذن يكون لمجهول سـ أربعة مقادير هي

$$\text{سَ} = \sqrt{-\frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}} \quad \text{و} \quad \text{سً} = \sqrt{-\frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}}$$

$$\text{سٌ} = -\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}} \quad \text{و} \quad \text{سٍ} = -\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ح}^٢}{٤} - \text{ك}}}$$

(مناقشات)

(٨٧) قد حولت المعادلة المفروضة الى معادلة بهذه الصورة

$$ص^{٢} + ع\,ص + ل = ٠$$

بفرض $س^{٢} = ص$ أى $س = \pm \sqrt{ص}$

وينتج من الارتباط الاخير آن كل مقدار فرض لمجهول $ص$ يحدث مقدارين متساويين ومتخالفى العلامة للمجهول $س$ ومن المعلوم أن لمجهول $ص$ من كل معادلة كمعادلة

$$ص^{٢} + ع\,ص + ل = ٠$$ له مقداران

فاذن يكون لمجهول $س$ أربعة مقادير متساوية مثنى ومتخالفة العلامة فحينئذ يقال

كل معادلة مضاعفة التربيع ذات درجة رابعة لها اربعة جذور متساوية مثنى ومتخالفة فى العلامة

ولنختبر الاحوال التى فيها هذه الجذور حقيقية أو تخيلية فنقول حيث أن $س = \pm \sqrt{ص}$ ينتج بالبداهة انه اذا كان جذرا $ص$ موجبين تكون جذور مجهول $س$ الاربعة حقيقية واذا كان احد جذرى $ص$ موجبا والآخر سالبا يكون جذران من الاربعة حقيقيين والآخران تخيليين

واذا كان جذرا $ص$ سالبين تكون جذور $س$ الاربعة تخيلية واذا كان جذرا $ص$ تخيليين تكون جذور مجهول $س$ الاربعة كذلك

وحيث علم مما تقدم كيفية استنتاج مقادير $ع$ و $ل$ وعلامتيهما وفى اى الاحوال يكون مقدارا $ص$ حقيقيين او تخيليين موجبين أو سالبين يسهل حينئذ معرفة جذور $س$ هل هى حقيقية او تخيلية فى جميع الفروضات الممكنة

(وهاك جدولا يحتوى على جميع الاحوال التى يمكن بيانها)

اذا كان لَ [illegible] وكان { لَ > ع²/٤ ، ع > ٠ } يكون صَ و صً حقيقيين وموجبين ...... وسَ و سً و سٌ و سٍ حقيقية

اذا كان لَ > ٠ وكان { لَ > ع²/٤ ، ع < ٠ } يكون صَ و صً حقيقيين وسالبين ...... ويكون سَ و سً و سٌ و سٍ تخيلية

اذا كان لَ > ٠ وكان { لَ > ع²/٤ } يكون صَ و صً تخيليين ...... ويكون سَ و سً و سٌ و سٍ تخيلية

اذا كان لَ < ٠ يكون صَ و صً حقيقيين ومخالفى العلامة ويكون { سَ و سً حقيقيين ، سٌ و سٍ تخيليين }

يمكن مناقشة الاحوال الخصوصية التى يكون فيها كل من ع و ك مساويا بالصفر فى آن واحد أو على التعاقب والحالة التى يكون فيها $\text{ك} = \frac{\text{ع}^2}{4}$ فيقال

اذا كان $\left\{\begin{array}{l}\text{ك} = 0\\ \text{ع} \neq 0\end{array}\right.$ يكون $\text{ص} = 0$ و $\text{ص}' = -\text{ع}$ ويكون $\left\{\begin{array}{l}\text{س} = 0 \text{ و } \text{س}' = \sqrt{-\text{ع}} \text{ ويكون س و سً حقيقيين اذا كان } \text{ع} < 0\\ \text{س}'' = 0 \text{ و } \text{س}''' = -\sqrt{-\text{ع}} \text{ وتخيليين اذا كان } \text{ع} > 0\end{array}\right.$

اذا كان $\left\{\begin{array}{l}\text{ك} \neq 0\\ \text{ع} = 0\end{array}\right.$ يكون $\text{ص} = \sqrt{-\text{ك}}$ و $\text{ص}' = -\sqrt{-\text{ك}}$ ويكون $\left\{\begin{array}{l}\text{س} = \sqrt[4]{-\text{ك}} \text{ و } \text{س}' = \sqrt{-\sqrt{-\text{ك}}} \text{ ويكون س و سً حقيقيين اذا كان } \text{ك} < 0\\ \text{س}'' = -\sqrt[4]{-\text{ك}} \text{ و } \text{س}''' = -\sqrt{-\sqrt{-\text{ك}}} \text{ و س و سً و سٍ و سٌ تخيلية اذا كان } \text{ك} > 0\end{array}\right.$

واذا كان $\left\{\begin{array}{l}\text{ك} = 0\\ \text{ع} = 0\end{array}\right.$ يكون $\text{ص} = 0$ و $\text{ص}' = 0$ ويكون $\left\{\begin{array}{l}\text{س} = 0 \text{ و } \text{س}' = 0\\ \text{س}'' = 0 \text{ و } \text{س}''' = 0\end{array}\right.$

واذا كان $\left\{\text{ك} = \frac{\text{ع}^2}{4}\right.$ يكون $\text{ص} = -\frac{\text{ع}}{2}$ و $\text{ص}' = -\frac{\text{ع}}{2}$ ويكون $\left\{\begin{array}{l}\text{س} = \sqrt{-\frac{\text{ع}}{2}} \text{ و } \text{س}' = \sqrt{-\frac{\text{ع}}{2}} \text{ وتكون الجذور الاربعة حقيقية متساوية ومتخالفة العلامة مثنى اذا كان } \text{ع} < 0\\ \text{س} = -\sqrt{-\frac{\text{ع}}{2}} \text{ و } \text{س}' = -\sqrt{-\frac{\text{ع}}{2}} \text{ وتكون تخيلية اذا كان } \text{ع} > 0\end{array}\right.$

(٨٨) ولنطبق هذه المباحث العمومية على بعض مسائل خصوصية فنقول

(المثال الاول)

اذا فرضت المعادلة $س^٤ - ١٣ س^٢ + ٣٦ = ٠$ وجعل فيها

$س^٢ = ص$ تؤول الى

$$ص^٢ - ١٣ ص + ٣٦ = ٠$$

فجذرا ص يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وموجبين اما الاول فلان الحد المعلوم موجب واقل من مربع نصف مكرر الحد الثانى وأما الثانى فلان الحد المعلوم موجب وأما الثالث فلان مكرر الحد الثانى سالب فاذن تكون جذور المجهول س الاربعة حقيقية ويتحقق هذا باجراء الحساب وذلك بأن يستخرج من المعادلة ذات الدرجة الثانية المتقدمة

$$ص = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٦٩}{٤} - ٣٦} = \frac{١٣ \pm \sqrt{١٦٩ - ١٤٤}}{٢} = \frac{١٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٢} = \frac{١٣ \pm ٥}{٢}$$

وينتج من ذلك

$ص' = \frac{١٣ + ٥}{٢} = ٩$ و $ص'' = \frac{١٣ - ٥}{٢} = ٤$ فاذن يكون

$س' = \pm \sqrt{٩} = \pm ٣$ و $س'' = \pm \sqrt{٤} = \pm ٢$

(المثال الثانى)

اذا فرضت المعادلة $س^٤ + ٣ س^٢ + ٢ = ٠$ وجعل فيها

$س^٢ = ص$ آلت الى

$$ص^٢ + ٣ ص + ٢ = ٠$$

فجذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وسالبين أما الاول والثانى فيبرهن عليهما بمثل ما تقدم فى المعادلة السابقة وأما الثالث

فلان مكرر الحد الثانى موجب فاذن تكون الجذور الاربعة للمعادلة المضاعفة التربيع تخيلية لان مقدارى ص يكونان

$$\text{ص}' = -1 \quad \text{و} \quad \text{ص}'' = -2$$

فحينئذ يكون $\text{س}' = \pm\sqrt{-1}$ و $\text{س}'' = \pm\sqrt{-2}$

(المثال الثالث)

اذا فرضت المعادلة $\text{س}^4 - \text{س}^2 - 6 = 0$ ثم جعل فيها

$\text{س}^2 = \text{ص}$ تؤل الى

$$\text{ص}^2 - \text{ص} - 6 = 0$$

وحيث ان الحد المعلوم لهذه المعادلة سالب يكون جذرا ص حقيقيين ومتخالفين فى العلامة ويكون اثنان من الجذور الاربعة للمعادلة المضاعفة التربيع حقيقيين واثنان تخيليين ويتحقق ذلك من البحث عن مقدارى ص ومقادير س فيحدث

$$\text{ص}' = 3 \quad \text{و} \quad \text{ص}'' = -2$$

وبناء عليه يحدث

$$\text{س}' = \pm\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \text{س}'' = \pm\sqrt{-2}$$

(المثال الرابع)

اذا فرضت المعادلة $5\,\text{س}^4 - 7\,\text{س}^2 + 3 = 0$ وجعل فيها

$\text{س}^2 = \text{ص}$ وقسمت جميع حدودها على ٥ تؤل الى

$$\text{ص}^2 - \frac{7\text{ص}}{5} + \frac{3}{5} = 0$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة موجب واكبر من مربع نصف مكرر الحد الثانى يكون جذرا ص تخيليين فاذن تكون جذور س كذلك

لانه

لانه يحصل

$ص = \frac{٧ + \sqrt{-١١}}{١٠}$ و $ص' = \frac{٧ - \sqrt{-١١}}{١٠}$ وبناء عليه يحدث

$$س = \pm\sqrt{\frac{٧ + \sqrt{-١١}}{١٠}} \quad و \quad س' = \pm\sqrt{\frac{٧ - \sqrt{-١١}}{١٠}}$$

(٨٩) حل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة ثانية يحذف اولا احد المجهولين باحدى الطرق المعلومة المقررة فى حل المعادلات ذات الدرجة الاولى كما فى (بند ٣٦)

فاذا كان المطلوب حل المعادلتين

$$س^٢ + ص^٢ = ء^٢$$

$$س + ص = ح$$

يستخرج من المعادلة الثانية مقدار المجهول ص ويوضع فى الاولى فيحدث على التوالى

$$س^٢ + (ح - س)^٢ = ء^٢ \quad أو$$

$$س^٢ + ح^٢ + س^٢ - ٢ ح س = ء^٢ \quad أو$$

$$٢ س^٢ - ٢ ح س + ح^٢ - ء^٢ = ٠ \quad أو$$

$$س^٢ - ح س + \frac{ح^٢ - ء^٢}{٢} = ٠ \quad ومنها يحدث$$

$$س = \frac{ح \pm \sqrt{٢ء^٢ - ح^٢}}{٢}$$

واذا وضع بدل س مقداره فى معادلة $ص = ح - س$ تؤل الى

$$ص = \frac{ح \mp \sqrt{٢ء^٢ - ح^٢}}{٢}$$

فحينئذ المعادلتان المفروضتان تكونان متحققتين بكل من مقدارى س ومقدارى ص غيرانه يلزم اخذ العلامتين العلويتين أو السفليتين لكل من المقدارين المأخوذين من مقدارى ص ومقدارى س

ولننبه ايضا على ان مقدارى ص يكونان عين مقدارى س لان المعادلتين المفروضتين لا تتغيران متى غير فيهما المجهول س بالمجهول ص والمجهول ص بالمجهول س فاذا عين مقدارا س قبل التغيير كانا عين مقدارى ص المستخرجين بعد التغيير

(٩٠) اذا كان المطلوب حل المعادلتين $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{ح}^{٢}$ و $٢\,\text{س}\,\text{ص} = \text{ى}^{٢}$ فلذلك حلان

الحل الاول ان يستخرج من المعادلة الثانية مقدار ص فيكون $\text{ص} = \frac{\text{ى}^{٢}}{٢\text{س}}$ ثم يوضع هذا المقدار فى المعادلة الاولى فيحدث على التوالى

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ى}^{٤}}{٤\text{س}^{٢}} = \text{ح}^{٢} \quad \text{أو}$$

$$٤\,\text{س}^{٤} + \text{ى}^{٤} = ٤\,\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} \quad \text{أو}$$

$$\text{س}^{٤} - \text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} + \frac{\text{ى}^{٤}}{٤} = ٠ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^{٤} - \text{ى}^{٤}}{٤}}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{٢} \pm \sqrt{\text{ح}^{٤} - \text{ى}^{٤}}}{٢}}$$

ولاستخراج مقدارى ص يوضع فى المعادلة $\text{ص} = \frac{\text{ى}^{٢}}{٢\text{س}}$ بدل س المقدار المضاعف $\pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{٢} + \sqrt{\text{ح}^{٤} - \text{ى}^{٤}}}{٢}}$ ثم يوضع ايضا المقدار المضاعف $\pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{٢} - \sqrt{\text{ح}^{٤} - \text{ى}^{٤}}}{٢}}$ بدل س ويختصر فيحدث لمجهول ص مقدار رباعى وهو

$$\text{ص} = \pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{٢} \mp \sqrt{\text{ح}^{٤} - \text{ى}^{٤}}}{٢}}$$

وتحقق المعادلتان المفروضتان بجملة مقادير س الاربعة وجملة مقادير ص الاربعة وتستنتج هاتان الجملتان بتعشيق علامات مقدار س باربعة

طرق

طرق مختلفة ثم تؤخذ العلامات المطابقة لها من مقادير ص فحينئذ تكون مقادير ص عين مقادير س وهذا الآتى من كون المجهولين داخلين بكيفية واحدة فى المعادلتين المفروضتين

(تنبيه)

لامكان تحويل مقدار $\text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{2} \pm \sqrt{\text{ح}^{4} - \text{د}^{4}}}{2}}$ الى هذه الصورة $\text{س} = \sqrt{\bar{\text{ح}}} + \sqrt{\bar{\text{د}}}$ يجب أن يكون $\text{ح}_{1}^{2} - \text{د}_{1}$ مربعا كاملا كما فى (بند ٦٦) ومن المثال المفروض ينتج $\text{ح}_{1} = \frac{\text{ح}^{2}}{2}$ او $\text{ح}_{1}^{2} = \frac{\text{ح}^{4}}{4}$ و $\text{د}_{1} = \frac{\text{ح}^{4} - \text{د}^{4}}{4}$ فاذن يكون $\text{ح}_{1}^{2} - \text{د}_{1} = \frac{\text{ح}^{4} - \text{ح}^{4} + \text{د}^{4}}{4} = \frac{\text{د}^{4}}{4}$ أى أن $\text{ح}_{1}^{2} - \text{د}_{1}$ مربع كامل فاذن يمكن تحويل المقدار المفروض الى مقدار آخر بهذه الصورة $\sqrt{\bar{\text{ح}}} + \sqrt{\bar{\text{د}}}$ وحيث علم من (بند ٦٦) بعد الرمز الى $\text{ح}_{1}^{2} - \text{د}_{1}$ بالحرف هـ^{2} أن $\bar{\text{ح}} = \frac{\text{ح}_{1} + \text{هـ}}{2}$ و $\bar{\text{د}} = \frac{\text{ح}_{1} - \text{هـ}}{2}$ وتقدم أن $\text{ح}_{1} = \frac{\text{ح}^{2}}{2}$ و $\text{هـ} = \sqrt{\frac{\text{د}^{4}}{4}} = \frac{\text{د}^{2}}{2}$ يكون $\bar{\text{ح}} = \frac{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}}{4}$ و $\bar{\text{د}} = \frac{\text{ح}^{2} - \text{د}^{2}}{4}$ وبالجملة فيكون

$$\text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}}{4}} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^{2} - \text{د}^{2}}{4}} \quad \text{أو} \quad \text{س} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^{2} - \text{د}^{2}}$$

وباجراء عمل مشابه لذلك يحدث

$$\text{ص} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 + \text{ء}^2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ء}^2}$$

(الحل الثانى)

ان يستنتج المقداران الاخيران من اول وهلة بطريقة أخصر من الطريقة المستعملة فى حل المعادلتين المفروضتين اللتين هما $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ح}^2$ و $2\,\text{س}\,\text{ص} = \text{ء}^2$ وذلك بان يجمعا طرفا الى طرف مع ملاحظة أن الطرف الاول الناتج يكون مربعا كاملا للكمية ذات الحدين $\text{س} + \text{ص}$ فيحدث $(\text{س} + \text{ص})^2 = \text{ح}^2 + \text{ء}^2$ ومنها يستخرج

$$\text{س} + \text{ص} = \pm\sqrt{\text{ح}^2 + \text{ء}^2}$$

ثم تطرح المعادلة الثانية من الاولى فيحدث

$(\text{س} - \text{ص})^2 = \text{ح}^2 - \text{ء}^2$ ومنها ينتج

$$\text{س} - \text{ص} = \pm\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ء}^2}$$

وحيث علم مجموع المجهولين س و ص وفاضلهما يستخرج كل منهما بواسطة القاعدة المقررة فى (بند ٣) فيكونان

$$\text{س} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 + \text{ء}^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ء}^2} \quad \text{و}$$

$$\text{ص} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 + \text{ء}^2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ء}^2}$$

(٩١) متى احتوت معادلة ذات مجهول واحد على علامة جذر تربيعى مشتمل على المجهول المذكور أو على علامات جذور كذلك فلحلها يلزم أولا حذف العلامة او العلامات كما فى الامثلة الآتية

(المثال الاول)

اذا كان المطلوب حل هذه المعادلة

$$٣ س = ٥ \sqrt{س} + ٢$$

يحول ٢ الى الطرف الاول بحيث يكون الطرف الثانى محتويا على علامة الجذر فقط ثم يرفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية ويختصر الناتج فيحدث

$$(٣ س - ٢)^٢ = (٥ \sqrt{س})^٢ \quad \text{او}$$

$$٩ س^٢ - ١٢ س + ٤ = ٢٥ س \quad \text{أو}$$

$$٩ س^٢ - ٣٧ س + ٤ = ٠ \quad \text{أو}$$

$$س^٢ - \frac{٣٧}{٩} س + \frac{٤}{٩} = ٠ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$س = \frac{٣٧}{١٨} \pm \sqrt{\left(\frac{٣٧}{١٨}\right)^٢ - \frac{٤}{٩}} = \frac{٣٧ \pm \sqrt{٣٧^٢ - ٤ \times ٣٦}}{١٨} = \frac{٣٧ \pm \sqrt{١٢٢٥}}{١٨}$$

$$= \frac{٣٧ \pm ٣٥}{١٨} \quad \text{فاذن يكون}$$

$$س = \frac{٣٧ + ٣٥}{١٨} = \frac{٧٢}{١٨} = ٤ \text{ و } سً = \frac{٣٧ - ٣٥}{١٨} = \frac{٢}{١٨} = \frac{١}{٩}$$

ولتحقيق هذين المقدارين يوضع فى المعادلة $٣ س - ٢ = ٥ \sqrt{س}$ بدل س مقداره وهو ٤ فيحدث

$$١٢ - ٢ = ١٠ \text{ أو } ٢ = ٢$$

اعنى ان المقدار الاول يكون محققا للمعادلة

واذا وضع فى المعادلة بعينها بدل س مقداره وهو $\frac{١}{٩}$ تؤل الى $\frac{١}{٣} - ٢ = \frac{٥}{٣}$ أو $- \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٣}$ وهذا تساو فاسد به يثبت ان مقدار $سً = \frac{١}{٩}$ لا يكون محققا للمعادلة $٣ س - ٢ = ٥ \sqrt{س}$

ولو كان محققا للمعادلة $٩ س^٢ - ١٢ س + ٤ = ٢٥ س$ لان بعض مقادير المجهول س اذا صير طرفى المعادلة $٣ س - ٢ = ٥ \sqrt{س}$ متساويين ومتخالفين فى العلامة يصير طرفى المعادلة

$٩ س^٢ - ١٢ س + ٤ = ٢٥ س$ متساويين لان هذين الطرفين حادثان من تربيع طرفى المعادلة الاولى

فلايجاد المعادلة التى تحقق بمقدار $س = \frac{١}{٩}$ نغير العلامة المتلوة بعلامة الجذر فى المعادلة $٣ س - ٢ = ٥ \sqrt{س}$ وبه نؤول الى

$$٣ س - ٢ = ٥ \sqrt{س}$$

(المثال الثانى)

اذا كان المطلوب حل المعادلة $\sqrt{٣ س + ١} = ٢ + \sqrt{س - ١}$ يرفع طرفاها للدرجة الثانية فتصير

$$٣ س + ١ = ٤ + ٤ \sqrt{س - ١} + س - ١$$

وبترك علامة الجذر فى الطرف الثانى واختصار الناتج يحدث

$٢ س - ٢ = ٤ \sqrt{س - ١}$ او $س - ١ = ٢ \sqrt{س - ١}$

ثم يربع الطرفان ثانيا فيحدث

$س^٢ - ٢ س + ١ = ٤ س - ٤$ أو

$س^٢ - ٦ س + ٥ = ٠$ ومنها يحدث

$س = ٣ \pm \sqrt{٩ - ٥} = ٣ \pm \sqrt{٤} = ٣ \pm ٢$ فاذن يكون

$س' = ٣ + ٢ = ٥$ و $س'' = ٣ - ٢ = ١$

ومقدارا $س'$ و $س''$ يحققان المعادلة المفروضة

(المثال الثالث)

اذا كان المطلوب حل المعادلة $\sqrt{٢ (س - ١)} - \sqrt{س + ١} - \sqrt{س (٣ - س)} = ٠$ نحول علامة الجذر الثالثة الى الطرف الثانى ثم يربع كل من الطرفين فيحدث

$٢ س - ٢ - ٢ \sqrt{٢ (س - ١)(س + ١)} + س + ١ = ٣ س - س^٢$ أو

$س^٢$

$$س^٢ - ١ = ٢ \sqrt{٢(س^٢ - ١)}$$

ثم يربع ايضا طرفا هذه المعادلة الاخيرة فيحدث

$س^٤ - ٢ س^٢ + ١ = ٨ س^٢ - ٨$ أو $س^٤ - ١٠ س^٢ + ٩ = ٠$ ومنها يحدث

$$س = \pm \sqrt{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٩}} = \pm \sqrt{٥ \pm \sqrt{١٦}} = \pm \sqrt{٥ \pm ٤}$$

فاذن يكون لمجهول س أربعة مقادير متغايرة هى

$$س = + \sqrt{٥ + ٤} = + ٣ \quad و \quad س = + \sqrt{٥ - ٤} = + ١$$

$$س = - \sqrt{٥ + ٤} = - ٣ \quad و \quad س = - \sqrt{٥ - ٤} = - ١$$

ولا تتحقق المعادلة المفروضة بمقدارى $س = - ٣$ و $س = + ١$

(الباب الرابع)

(فى المتناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)

(فى المتناسبة العددية أى التفاضلية)

(٩٢) براهين خواص المتناسبة المقررة فى كتب علم الحساب تسهل جدا بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال كل متناسبة عددية كالمتناسبة

$$ح \cdot ء : هـ \cdot و$$

توضع هكذا

$ح - ء = هـ - و$ ومنها يستخرج

$$ح + و = هـ + ء \quad و \quad و = هـ + ء - ح \quad و \quad هـ = ح + و - ء$$

أعنى أن كل متناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها وأن احد طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها منقوصا منه الطرف الآخر وأن أحد وسطيها يساوى حاصل جمع طرفيها منقوصا منه الوسط الآخر ويستنتج من المتساوية $ح + و = هـ + ء$ أن $ح - ء = هـ - و$ وأعنى

اذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع آخرين تركب من هذه الاعداد الاربعة متناسبة عددية جزأ أحد الحاصلين طرفاها وجزأ الآخر وسطاها

والوسط التفاضلى لعددين يساوى نصف حاصل جمعهما لانه من المتناسبة

ح . س : س . ء يحدث

$٢ س = ح + ء$ ومن هذه المتساوية ينتج

$$س = \frac{ح + ء}{٢}$$

(فى المتناسبة الهندسية)

(٩٣) كل متناسبة هندسية كالمتناسبة ح : ء :: هـ : و

توضع هكذا $\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ ومن هذه المتساوية يستنتج

$ح و = ء هـ$ و $و = \frac{ء هـ}{ح}$ و $هـ = \frac{ح و}{ء}$

أعنى أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب وسطيها وأن احد طرفيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفها الآخر وأن أحد وسطيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط الآخر ويستنتج من كل متساوية كالمتساوية $ح و = ء هـ$ أن $\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$

أعنى اذا ساوى حاصل ضرب عددين حاصل ضرب عددين آخرين تركب من هذه الاعداد الاربعة متناسبة هندسية اصلا أحد الحاصلين طرفان لها واصلا الحاصل الآخر وسطان لها

ويستنتج من المتساوية $ح و = ء هـ$ بناء على ماتقدم ثمان متناسبات

ح : ء :: هـ : و ، ح : هـ :: ء : و ، و : ء :: هـ : ح ، و : هـ :: ء : ح

ء : ح :: و : هـ ، ء : و :: ح : هـ ، هـ : و :: ح : ء ، هـ : ح :: و : ء

فيشاهد من متناسبات الصف الاول الاربعة أن الاعداد الاربعة المتناسبة مع بعضها يتكون منها متناسبة ايضا بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين ويشاهد ايضا من متناسبات الصف الثانى الاربعة ان التناسب لا يتغير بتغيير الطرفين بالوسطين ولا الوسطين بالطرفين

والوسط الهندسى بين عددين او كميتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من

المتناسبة

المتناسبة $ح : س :: س : ء$ يحدث

$$س^2 = ح \times ء \quad \text{او} \quad س = \sqrt{ح \times ء}$$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة فى عدد واحد أو قسما عليه بقيت المتناسبة على حالها لانه يستنتج من المتساوية $\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ أن

$\frac{ح}{ء} = \frac{هـم}{وم}$ او $ح : ء :: هـم : وم$

ويستنتج ايضا من المتساوية المذكورة $\frac{ح}{هـ} = \frac{ء}{و}$ ومن هذه يحدث

$\frac{ح}{هـ} = \frac{ءم}{وم}$ أى $ح : هـ :: ءم : وم$

وبمثل هذا يبرهن على حالة القسمة

واذا كان لمتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الاخريين منهما متناسبة فالمتناسبتان

$ح : ء :: هـ : و$ و $ح : ء :: \bar{هـ} : \bar{و}$ يوضعان هكذا

$\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ و $\frac{ح}{ء} = \frac{\bar{هـ}}{\bar{و}}$ ومن هاتين المتساويتين يحدث

$\frac{هـ}{و} = \frac{\bar{هـ}}{\bar{و}}$ أى $هـ : و :: \bar{هـ} : \bar{و}$

ومتى اتحد المقدمان أو التاليان فى متناسبتين تركب من غير المتحد منهما متناسبة فالمتناسبتان

$ح : ء :: هـ : و$ و $ح : ع :: هـ : ك$ أو

$ء : ح :: و : هـ$ و $ع : ح :: ك : هـ$

يستنتج منهما بمقتضى ما تقدم

$ح : هـ :: ء : و$ و $ح : هـ :: ع : ك$ فاذن يحدث

$ء : و :: ع : ك$ أى $ء : ع :: و : ك$

وكل متناسبة هندسية كالمتناسبة $ح : ء :: هـ : و$ يمكن وضعها هكذا $\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ وباضافة واحد لكل من طرفى هذه المتساوية أو طرحه منهما تؤل الى

$$\frac{\text{ح}}{\text{د}} \pm ١ = \frac{\text{ه}}{\text{و}} \pm ١$$ أى

$$\frac{\text{ح} \pm \text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{ه} \pm \text{و}}{\text{و}}$$ ومنها يحدث

$$\text{ح} + \text{د} : \text{د} :: \text{ه} + \text{و} : \text{و} \quad \text{و} \quad \text{ح} - \text{د} : \text{د} :: \text{ه} - \text{و} : \text{و}$$

ويحدث ايضا من مقارنة المتناسبة $\text{ح} : \text{د} :: \text{ه} : \text{و}$ بكل من المتناسبتين المتقدمتين ان

$$\text{ح} + \text{د} : \text{ح} :: \text{ه} + \text{و} : \text{ه} \quad \text{و} \quad \text{ح} - \text{د} : \text{ح} :: \text{ه} - \text{و} : \text{ه}$$

ومنهما يحدث

$$\text{ح} + \text{د} : \text{ح} - \text{د} :: \text{ه} + \text{و} : \text{ه} - \text{و}$$

وينتج من ذلك أن نسبة المقدم الاول زائدا اوناقصا التالى الاول الى هذا التالى كنسبة المقدم الثانى زائدا أوناقصا التالى الثانى الى هذا التالى وأن نسبة المقدم الاول زائدا أوناقصا التالى الاول الى هذا المقدم كنسبة المقدم الثانى زائدا أوناقصا التالى الثانى الى هذا المقدم وأن نسبة المقدم الاول زائدا تاليه الى هذا المقدم ناقصا تاليه كنسبة المقدم الثانى زائدا تاليه الى هذا المقدم ناقصا تاليه

واذا غير وسط المتناسبة $\text{ح} : \text{د} :: \text{ه} : \text{و}$ آلت الى

$\text{ح} : \text{ه} :: \text{د} : \text{و}$ ومنها يحدث بناء على ما تقدم

$\text{ح} \pm \text{ه} : \text{د} \pm \text{و} :: \text{ه} : \text{و} :: \text{ح} : \text{د}$ ومنها يحدث

$$\text{ح} + \text{ه} : \text{د} + \text{و} :: \text{ح} - \text{ه} : \text{د} - \text{و}$$

اعنى ان نسبة حاصل جمع اوفاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع اوفاضل تاليها كنسبة اى مقدم الى تاليه وان نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع التاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين والمتناسبة التى بهذه الصورة $\text{ح} : \text{د} :: \text{ه} : \text{و} :: \text{ز} : \text{ح} :: \text{ط} : \text{ى} ::$ الخ تسمى متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تواليها كنسبة

اى مقدم الى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة فى هذه المتناسبة بالحرف ل
تحصل $\frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \text{ل}$ و $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \text{ل}$ و $\frac{\text{ز}}{\text{ح}} = \text{ل}$ و $\frac{\text{ط}}{\text{ى}} = \text{ل}$ ..... الخ
ومنها يحدث

$$\text{حـ} = \text{دل} \quad \text{و} \quad \text{هـ} = \text{ول} \quad \text{و} \quad \text{ز} = \text{حل} \quad \text{و} \quad \text{ط} = \text{ىل} \quad \text{و} \; \ldots \; \text{الخ}$$

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يحدث

$$\text{حـ} + \text{هـ} + \text{ز} + \text{ط} + \text{الخ} = \text{ل} \, (\text{د} + \text{و} + \text{ح} + \text{ى} + \ldots\ldots \text{الخ})$$

ومنها يحدث

$$\frac{\text{حـ} + \text{هـ} + \text{ز} + \text{ط} + \ldots\ldots \text{الخ}}{\text{د} + \text{و} + \text{ح} + \text{ى} + \ldots\ldots \text{الخ}} = \text{ل} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \text{الخ}$$ فاذن يكون

$$\text{حـ} + \text{هـ} + \text{ز} + \ldots \text{الخ} : \text{د} + \text{و} + \text{ح} + \ldots \text{الخ} :: \text{حـ} : \text{د} :: \text{هـ} : \text{و} :: \text{الخ}$$

واذا ضربت جملة متناسبات فى بعضها كل حد فى نظيره تكون من حواصل الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالمتناسبات

$$\text{حـ} : \text{د} :: \text{هـ} : \text{و} \quad \text{و} \quad \text{حـَ} : \text{دَ} :: \text{هـَ} : \text{وَ} \quad \text{و} \quad \text{حـُ} : \text{دُ} :: \text{هـُ} : \text{وُ}$$

يحدث منها

$$\frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{حـَ}}{\text{دَ}} = \frac{\text{هـَ}}{\text{وَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{حـُ}}{\text{دُ}} = \frac{\text{هـُ}}{\text{وُ}}$$ وبضربها فى بعضها يحدث

$$\frac{\text{حـ حـَ حـُ}}{\text{د دَ دُ}} = \frac{\text{هـ هـَ هـُ}}{\text{و وَ وُ}} \quad \text{اى} \quad \text{حـ حـَ حـُ} : \text{د دَ دُ} :: \text{هـ هـَ هـُ} : \text{و وَ وُ}$$

واذا رفع كل من الحدود الاربعة لمتناسبة الى درجة ما او اخذ جذر كل منها بدرجة واحدة لم تزل متناسبة
فالمتناسبة حـ : د :: هـ : و توضع هكذا

$\frac{\text{حـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فاذا رفع طرفا هذه المتساوية لدرجة ما او اخذ جذراهما بدرجة ما بقيت على حالها فيكون

$$\frac{\text{حـ}^{\text{م}}}{\text{د}^{\text{م}}} = \frac{\text{هـ}^{\text{م}}}{\text{و}^{\text{م}}} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt[\text{م}]{\text{حـ}}}{\sqrt[\text{م}]{\text{د}}} = \frac{\sqrt[\text{م}]{\text{هـ}}}{\sqrt[\text{م}]{\text{و}}}$$ ومنهما يحدث

حم : ءم :: هم : وم و م√ح : م√ء :: م√هـ : م√و

(فى المتواليات العدديه)

(٩٤) كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد احدها عن سابقه او ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية او تفاضلية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية فالمتسلسلتان

١ و ٤ و ٧ و ١٠ و ١٣ و ١٦ و ١٩ و ٢٢ و ٢٥ و
٦٠ و ٥٦ و ٥٢ و ٤٨ و ٤٤ و ٤٠ و ٣٦ و ٣٢ و ٢٨

تسميان متواليتين الاان الاولى تسمى متوالية عددية تصاعدية اساسها ثلاثة والاخرى تنازلية اساسها اربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية او تنازلية بحسب كون اساسها موجبا او سالبا

واذا رمز بالحروف ح و ء و هـ و و ...... الخ لحدود متوالية عددية توضع هكذا

÷ ح . ء . هـ . و . ر . ح . ط .... لَ . ل

ويلفظ بها ح الى ء كنسبة ء الى هـ كنسبة هـ الى و الى ... الخ

واذا رمز للاساس بالحرف س وللحد الاول بالحرف ح وللحد الاخير المسبوق بحدود عددها ن ـ ١ بالحرف ل تحصل بمقتضى التعريف

ء = ح + س و هـ = ء + س و و = هـ + س ... و ل = لَ + س أى

ء = ح + س و هـ = ح + ٢س و و = ح + ٣س ... و ل = ح + (ن − ١) س

اى ان اى حد من متوالية عددية يساوى الحد الاول مضافا اليه حاصل ضرب عدد الحدود السابقة له فى الاساس

وحيث ان المعادلة ل = ح + (ن − ١) س ...... (١)

تشتمل على اربع كميات لا يمكن ادراك احدها الا بعد معرفة الثلاث الاخرى

واذا اريد ادخال جملة حدود عددها م بين اى حدين معلومين بشرط ان يتركب من الجميع متوالية عددية شوهد ان هذه المتوالية لا تحتاج

فى تركبها الالتعيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من القانون (١)

$$س = \frac{ل - ح}{ن - ١}$$

وحيث ان ن = م + ٢ يكون

$$س = \frac{ل - ح}{م + ١}$$

اعنى ان اساس المتوالية المطلوبة يساوى خارج قسمة فاضل الحدين المعلومين على عدد الحدود المدخلة زائدا واحدا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ و ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع فى المعادلة $س = \frac{ل - ح}{م + ١}$ بدل ل و ح و م مقاديرها وهى ٤٩ و ٤ و ٨ فيتحصل $س = \frac{٤٩ - ٤}{٩} = ٥$ اعنى ان الاساس المطلوب يساوى ٥ وحينئذ تركب المتوالية هكذا

÷ ٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

وحاصل جمع كل حدين كائنين على ابعاد متساوية من طرفى متوالية يساوى حاصل جمع هذين الطرفين فى المتوالية العددية

÷ ح . ء . هـ . و . ع . ط . ل يتحصل

ء = ح + س و ط = ل ـ س ومنهما يحدث

ء + ط = ح + ل

وقس على هذا

(٩٥) واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

÷ ح . ء . هـ . . . . ل

يتحصل بالبناء على ما تقدم

$$ع = ح + (ح + س) + (ح + ٢ س) + \cdots + (ح + (ن - ١) س)$$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب ولايجاد قانون مختصر عن هذا توضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

ع = ح + (ح + س) + (ح + ٢س) ... + (ل − ٢س) + (ل − س) + ل

ع = ل + (ل − س) + (ل − ٢س) ... + (ح + ٢س) + (ح + س) + ح

وبجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة ان حاصل جمع كل حدين متحدين فى الرتبة يؤل الى ح + ل يتحصل

٢ ع = ح + ل مكررا بقدر عدد الحدود اى

٢ ع = (ح + ل) ن ومنها يحدث

ع = (ح + ل) ن / ٢ .... (٢)

اعنى ان حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكررا بقدر عدد حدودها

واذا وضع فى القانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المبين بمعادلة (١) آل الى

ع = (٢ح + (ن − ١) س) ن / ٢

(٩٦) تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة القانونين (١) و (٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس ح و س و ن و ل و ع الداخلة فى القانونين (١) و (٢) امكن تعيين الاثنتين الاخريين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بفرض ثلاث منها معلومة وباقيها مجهولا يحدث عشر مسائل سهلة الحل لانه يتحصل دائما معادلتان ذاتا مجهولين

وهاك جدولا يشتمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد ممارسة ذلك

عدد المسائل	معاليم	مجاهيل	مقادير المجاهيل	
١	ح و س و ن	ل و ع	$ل = ح + (ن - ١)س$	و $ع = \frac{١}{٢} ن \left(٢ح + (ن - ١)س\right)$
٢	ع و س و ن	ح و ل	$ح = \frac{٢ع - ن(ن - ١)س}{٢ن}$	و $ل = \frac{٢ع + ن(ن - ١)س}{٢ن}$
٣	ل و س و ن	ح و ع	$ح = ل - (ن - ١)س$	و $ع = \frac{١}{٢} ن \left(٢ل - (ن - ١)س\right)$
٤	ح و ل و ن	ع و س	$ع = \frac{١}{٢} ن (ح + ل)$	و $س = \frac{ل - ح}{ن - ١}$
٥	ح و ع و ن	ل و س	$ل = \frac{٢ع}{ن} - ح$	و $س = \frac{٢(ع - حن)}{ن(ن - ١)}$
٦	ل و ع و ن	ح و س	$ح = \frac{٢ع}{ن} - ل$	و $س = \frac{٢(نل - ع)}{ن(ن - ١)}$
٧	ح و ل و س	ن و ع	$ن = \frac{ل - ح}{س} + ١$	و $ع = \frac{(ل + ح)(ل - ح + س)}{٢س}$
٨	ح و ع و س	ن و ل	$ن = \frac{س - ٢ح \pm \sqrt{(س - ٢ح)^{٢} + ٨سع}}{٢س}$	و $ل = ح + (ن - ١)س$
٩	ل و س و ع	ن و ح	$ن = \frac{س + ٢ل \pm \sqrt{(س + ٢ل)^{٢} - ٨سع}}{٢س}$	و $ح = ل - (ن - ١)س$
١٠	ح و ل و ع	ن و س	$ن = \frac{٢ع}{ح + ل}$	و $س = \frac{(ل + ح)(ل - ح)}{٢ع - (ل + ح)}$

(مسائل يطلب حلها من الطلبة)

(٩٧) الاولى ان يطلب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الاخير ٢٨٥ وحاصل جمعها ٢٩٤٥
الثانية ان يطلب ادخال تسعة اوساط عددية بين اى حدين من المتوالية
÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧
الثالثة ان يطلب معرفة عدد طابور مثلثى صفه الاول نفر واحد والثانى نفران والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عدد انفاره مساويا ٥
الرابعة ان يطلب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية
÷ ١ . ٣ . ٥ . ٧ . ٩ ... التى عدد حدودها ٥
الخامسة ان يراد ترميل طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ مترا وقد عملت مقايسة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عربانة كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانة الاولى على بعد من التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربانة الاخيرة الى المحل الذى شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الامتار التى يقطعها سواق العربانات فى ترميل الطريق المذكورة
السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد والمطلوب معرفة عدد الايام التى تمضى من ابتداء سيرهما الى نقطة تلاقيهما والمسافة التى يقطعها كل منهما

(فى المتواليات التقسيمية اى الهندسية)

(٩٨) كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتالية خارج قسمة احدها على سابقه ثابت او كل حد منها مساو لسابقه مضروبا فى كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية
وبمقتضى هذا التعريف تكون المتوالية تصاعدية او تنازلية بحسب اساسها اى بحسب كونه اكبر من الواحد او اصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

∺ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ تصاعدية

والمتوالية

∺ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$: $\frac{١}{١٦}$: $\frac{١}{٦٤}$ تنازلية

ويلفظ بها كالتلفظ بالمتوالية العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

∺ ح : ء : هـ : و : ز : ح : ط : .... ل

فاذا رمز بالحرف س لاساسها وبالحرف ل لحدها الاخير المسبوق بحدود عددها ن ــ ١ تحصل

$$\text{ء} = \text{ح}\,\text{س} \quad \text{و} \quad \text{هـ} = \text{ح}\,\text{س}^{٢} \quad \text{و} \quad \text{و} = \text{ح}\,\text{س}^{٣} \;\ldots\ldots\; \text{و} \quad \text{ل} = \text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$$

وحيث ان القانون $\text{ل} = \text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ ...... (١) مشتمل على الكميات الاربع ح و س و ن و ل يمكن تعيين احداها بمعرفة الثلاث الاخرى فاذن يكون الحد الاخير من متوالية هندسية مساويا لحاصل ضرب الحد الاول فى الاساس مرفوعا للدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له

فاذا اريد مثلا تعيين الحد الثامن من المتوالية

∺ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤

يحصل $٢ \times ٣^{٧} = ٢ \times ٢١٨٧ = ٤٣٧٤$ وهو الحد الثامن المطلوب

واذا اريد تعيين الحد الثانى عشر من المتوالية

∺ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$ فانه يحصل

$\left(٦٤ \times \frac{١}{٤}\right)^{١١} = \frac{٤^{٣}}{٤^{١١}} = \frac{١}{٤^{٨}} = \frac{١}{٦٥٥٣٦}$ وهو الحد الثانى عشر المطلوب

ويستعمل القانون $\text{ل} = \text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ لادخال جملة حدود عددها م بين كميتين معلومتين ح و ل ليتركب من الكل متوالية هندسية وحيث ان عدد الحدود المدخلة م يكون عدد حدود المتوالية المراد تحصيلها

م + ٢ ويكون الحد الاخير منها $ل = ح س^{م+٢-١} = ح س^{م+١}$ ومن هنا يستخرج الاساس المجهول س فيكون

$$س = \sqrt[م+١]{\frac{ل}{ح}}$$

اعنى ان الاساس يساوى جذر خارج قسمة الكميتين المعلومتين على بعضهما بدرجة تساوى م + ١

فاذا اريد مثلا ادخال اربعة حدود بين العددين ٢ و ٤٨٦ يوضع فى مقدار س بدل م و ل و ح مقاديرها وهى ٤ و ٤٨٦ و ٢

فيؤل الى $س = \sqrt[٥]{\frac{٤٨٦}{٢}} = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$ فحينئذ تركب المتوالية هكذا

$$\because ٢ : ٢ \times ٣ : ٢ \times ٣^{٢} : ٢ \times ٣^{٣} : ٢ \times ٣^{٤} : ٢ \times ٣^{٥}$$ اى

$$\because ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤ : ١٦٢ : ٤٨٦$$

(٩٩) حاصل ضرب كل حدين متماثلى الوضع من طرفى متوالية هندسية واحد لانه من المتوالية

$$\because ح : د : هـ : و : ع : ط$$ يحدث

$د = ح \times س$ و $ع \times س = ط$ ومنها ينتج

$$د \times ع \times س = ط \times ح \times س$$ اى

$$د \times ع = ط \times ح$$

وقس على ذلك حواصل باقى الحدود

(١٠٠) حاصل جمع حدود متوالية هندسية يساوى بعد الرمز له بالحرف ع

$$ع = ح + ح س + ح س^{٢} + ح س^{٣} + \cdots + ح س^{ن-١} \quad \ldots\ldots (٢)$$

ولتحويل هذا القانون الى اخصر منه يضرب كل من طرفيه فى الاساس س فيحدث

$$ع س = ح س + ح س^{٢} + ح س^{٣} + ح س^{٤} + \cdots + ح س^{ن-١} + ح س^{ن} \quad \ldots (\bar{٢})$$

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة $(\bar{٢})$ يحدث

$\text{ع}(\text{س} - ١) = \text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}} - \text{ح} = \text{ح}(\text{س}^{\text{ن}} - ١)$ ومنها يستخرج

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}(\text{س}^{\text{ن}} - ١)}{\text{س} - ١} \quad \cdots\cdots\cdots (٣)$$

واذا وضع ل بدل الحد الاخير الذى مقداره $\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ فى المعادلة (٣) تؤل الى

$$\text{ع} = \frac{\text{ل}\,\text{س} - \text{ح}}{\text{س} - ١}$$

اعنى ان مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمة باقى طرح الحد الاول من حاصل ضرب الحد الاخير فى الاساس على باقى طرح الواحد من الاساس

(١٠١) جميع المسائل المتعلقة بالمتواليات الهندسية تحل بواسطة المعادلتين (١) و (٣) المحتويتين على الكميات الخمس ح و س و ن و ل و ع اذا علم منها ثلاث لانه حينئذ يمكن تعيين الاثنين الاخريين الا ان اغلب حل المسائل المذكورة يتوقف على قواعد تأتى كما لو كان احد المجهولين ن الذى هو عدد حدود المتوالية فانه يؤل الامر الى حل معادلة مشتملة على اس مجهول وكما لو كان المجهولان ح و س أو ل و س فانه يؤل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود المتوالية

واذا استعملت المعادلة (٢) الحادثة من المعادلة (٣) بواسطة القسمة آل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية $\text{ن} - ١$

واذا كان الاساس $\text{س} = ١$ استعملت المعادلة (٢) بدل المعادلة (٣) لانه يحدث من المعادلة (٣) للمجموع ع مقدار غير معين اى ان $\text{ع} = \frac{٠}{٠}$ واما المعادلة (٢) فانها تحدث له مقدارا محدودا اى ان $\text{ع} = \text{ن}\,\text{ح}$ وقد تقدم ان المقدار غير المعين ينشأ عن وجود مضروب مشترك فالمضروب المشترك للمعادلة (٣) هنا هو $(\text{س} - ١)$ انظر (بند ٥١)

(١٠٢) متى كان الاساس المرموز له بالحرف س اصغر من الواحد

اى كسرا صارت المتوالية تنازلية فحينئذ قانون (٣) يكتب هكذا

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}(1-\text{س}^{\text{ن}})}{1-\text{س}} = \frac{\text{ح}}{1-\text{س}} - \frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}}}{1-\text{س}}$$

فيشاهد من فرض $\text{س} < 1$ انه اذا ازداد العدد ن شيأ فشيأ نقصت الكمية $\frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}}}{1-\text{س}}$ كذلك وعليه فيمكن اخذ العدد ن كبيرا بحيث يكون المقدار $\frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{ن}}}{1-\text{س}}$ اقل من كل كمية معلومة فعلى ذلك كلما اخذت حدود اكثر من الحدود المتعاقبة للمتوالية بالابتداء من الحد الاول قرب مقدار ع من $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ فاذن يمكن اخذ حدود كافية ليكون حاصل جمعها مختلفا عن $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ بقدر ما يراد وعليه فيقال ان نهاية حاصل جمع جملة حدود من المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الاول تكون مساوية للكسر $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهائيا كان حاصل جمعها مساويا $\frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$ اى ان حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهائى يساوى خارج قسمة حدها الاول على فاضل الواحد والاساس

(١٠٣) . ويمكن تعيين هذا الحاصل من اول الامر بفرض المتوالية التنازلية التى عدد حدودها لانهائى هكذا

$\div\!\div$ ح : ء : هـ : و .... الخ ومنها يحدث

ء = ح س و هـ = ء س و و = هـ س و ...... الخ

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يتحصل

ء + هـ + و + ... الخ = (ح + ء + هـ + ... الخ) س

وحيث ان الطرف الاول من هذه المتساوية يساوى حاصل جمع حدود المتوالية المذكورة ماعدا الحد الاول اى يساوى ع ــ ح وان الطرف الثانى يساوى مجموع حدودها مكررا بقدر الاساس س اى يساوى ع س يكون ع ــ ح = ع س او ع (١ ــ س) = ح ومنها يحدث

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{1-\text{س}}$$

وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لانه اذا اجريت عملية القسمة

على

على المقدار $\frac{ح}{١-س}$ حيث نتج ÷÷ ح : حه : حه^{٢} : حه^{٣} : .... الخ
وهو ناتج غير مخالف للمتوالية ÷÷ ح : ء : ه : و : .... الخ
المفروضة الا في تبديل الحدود ح و ء و ه ..... الخ بمقاديرها
المبينة بدالة الحد الاول والاساس

(١٠٤) يمكن تعيين كسر اعتيادى مكافىء لكسر دائر بسيط بواسطة القانون المعد لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية لان الكسر الدائر البسيط

٠,٣٢٤٣٢٤٣٢٤٣٢٤ مثلا يمكن وضعه بهذه الصورة

$$\frac{٣٢٤}{١٠^{٣}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{٦}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{٩}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{١٢}} + \ldots \text{ الخ}$$

فقد آل الكسر المذكور حينئذ الى متوالية تنازلية غير منتهية مجموع حدودها $ع = \frac{٣٢٤}{١٠٠٠} \div \left(١ - \frac{١}{١٠٠٠}\right) = \frac{٣٢٤}{٩٩٩}$ وهو الكسر الاعتيادى المكافىء للكسر الدائر البسيط المفروض

ويمكن تعيين كسر اعتيادى مكافىء لكسر دائر مركب بواسطة القانون المعد لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية وذلك ان الكسر الدائر المركب ٠,٥٧٣٢٤٣٢٤٣٢٤ يكون اصغر من ٥٧,٣٢٤٣٢٤٣٢٤ اى من $٥٧ + \frac{٣٢٤}{٩٩٩}$ مائة مرة فاذن يكون الكسر الدائر المركب مساويا للاعتيادى

$$\frac{٥٧ \times ٩٩٩ + ٣٢٤}{٩٩٩٠٠} = \frac{٥٧(١٠٠٠-١) + ٣٢٤}{٩٩٩٠٠} = \frac{٥٧٣٢٤ - ٥٧}{٩٩٩٠٠}$$

(مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية)

(١٠٥) الاولى لما خير مخترع الشطرنج فى طلب جائزة اختار ان يوضع له فى الخانة الاولى حبة قمح وفى الثانية حبتان وفى الثالثة اربع وفى الرابعة ثمان وهكذا اى ان يوضع فى كل خانة تالية ضعف سابقتها الى الاربع والستين خانة فما عدد الحب الذى يأخذه المخترع المذكور

فالجواب ان عدد الحب المطلوب يساوى حاصل جمع حدود متوالية هندسية معلوم منها $\text{ح} = 1$ و $\text{س} = 2$ و $\text{ن} = 64$ فاذن يكون

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}(\text{س}^{\text{ن}} - 1)}{\text{س} - 1} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = ١٨٤٤٨٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥$$

ومن المعلوم فى التجاريب ان المرياجرام اى العشرة آلاف جرام تساوى ٢٦١٠٠٠ حبة تقريبا فيكون مقدار ع مساويا ٧٠٦٧٧١٨٠٣٥٩٠٤٠ ميرياجراما وحيث كان ثمن المرياجرام يساوى فرنكين يكون ثمن ما يأخذه المخترع مساويا ١٤١٣٥٤٣٦٠٧١٨٠٨٠ فرنكا

الثانية مريض وهب لمريض آخر فى مرض موته عبداله فوهبه الآخر فى مرض موته للاول ولا شئ لهما سواه وحيث ان هبة مرض الموت لا تنفذ الا فى الثلث ان كانت لغير وارث اوله واجازها باقى الورثة يكون للموهوب له $\frac{1}{3}$ العبد وللواهب ثلثاه وبهبته الموهوب له يرجع للواهب من هذا الثلث ثلثه وبناء عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب له ومتى زادت هبة الموهوب له زاد مال الواهب الاول وبناء عليه يزيد مال الموهوب له وهكذا فاذن يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلا من المريضين فى العبد المذكور

فالجواب ان يفرض ثمن العبد اونفسه مساويا للواحد فيكون مقدار ما وهبه الاول منه مساويا $\frac{1}{3}$ ومقدار هبة الموهوب له مساويه ثلث الثلث وبناء عليه تكون حصة الواهب الاول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ وحصة الموهوب له $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ وحيث زاد مال الواهب الاول ثلث الثلث اى $\frac{1}{9}$ يرجع للواهب الثانى ثلث $\frac{1}{9}$ اى $\frac{1}{27}$ فاذن تكون

حصة الواهب الاول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

وحيث زاد مال الواهب الثانى بمقدار ثلث التسع اى $\frac{1}{27}$ يرجع للواهب الاول منها ثلثها وهو $\frac{1}{81}$ فاذن تكون

حصة

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١}$

وحيث زاد للواهب الاول $\frac{١}{٨١}$ من العبد يرجع للواهب الثانى منه ثلثه

اى $\frac{١}{٢٤٣}$ وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} - \frac{١}{٢٤٣}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١} + \frac{١}{٢٤٣}$ وهكذا

فقد نشأ من هذه الهيئة الدور والتسلسل فاذن تكون حصة كل منهما مساوية

لفاضل حاصلى جمعى متواليتين تنازليتين غيرنهائيتين فتواليتا الواهب الثانى

$\div\ \frac{١}{٣} : \frac{١}{٢٧} : \frac{١}{٢٤٣} : \cdots$ الخ و $\div\ \frac{١}{٩} : \frac{١}{٨١} : \cdots$ الخ

ومنها ينتج ان حصته الحقيقية مساوية $\frac{٣}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$ فقد ال

الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الى ربع وبناء عليه تكون حصة الواهب

الاول ثلاثة ارباع

فلتعيين حصة الواهب الاول يجرى العمل المذكور فى تعيين حصة

الواهب الثانى

الثالثة احد المصورين عنده ٨ صور يريد بيعها فدفع له فى كل واحدة

١٥٠ غرشا مرة واحدة ثم دفع له فى ادناها ثمن قدره خمسة غروش وفيما

فوقه عشرة غروش وهكذا بتضعيف الثمن الى الثامنة والمراد معرفة اربح

البيعين

(فالجواب ان البيع الثانى اربح)

الرابعة برميل من الخل يحتوى على مائة اقه صار يؤخذ منه كل يوم اقة

واحدة ويضاف اليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا

الفعل حتى لا يبقى من الخل الا الربع

(فالجواب انه لابد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

(فى اللوغاريتم)

(١٠٦) قبل الشروع فى الخواص العمومية للوغاريتم واستعماله

في العمليات الحسابية نذكر نظرية هي ان جميع الاعداد تنتج من قوى عدد موجب اكبر من الواحد او اصغر منه بيان ذلك ان يقال

اولا اذا رمز بالرمز ح لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد وكونت القوى المتوالية $\text{ح}^{٠}$ و $\text{ح}^{١}$ و $\text{ح}^{٢}$ و $\text{ح}^{٣}$ الخ حدث من ذلك جملة اعداد لا تزال اخذة في الزيادة الى غير نهاية ومتقاربة من بعضها كلما تقاربت اسس هذه القوى من بعضها ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين س و ص لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ وفرض للمتغير س جملة مقادير متقاربة من بعضها من ابتداء الصفر الى $+\infty$ كان للمتغير ص جملة مقادير متقاربة من بعضها بحيث اذا زاد س بكيفية متوالية من ابتداء الصفر الى $+\infty$ اخذ ص جميع المقادير من الواحد الى $+\infty$ واذا فرض للمتغير سَ مقادير سالبة بان كان $\text{س} = -\text{سَ}$ آلت المعادلة المتقدمة الى

$$\text{ص} = \text{ح}^{-\text{سَ}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{سَ}}}$$

واذا فرض ان سَ يأخذ مقادير من ابتداء الصفر الى $+\infty$ فان $\text{ح}^{\text{سَ}}$ يأخذ مقادير من ابتداء الواحد الى $+\infty$ وحينئذ يأخذ $\frac{1}{\text{ح}^{\text{سَ}}}$ مقادير من ابتداء الواحد الى $\frac{1}{\infty}$ اي الى الصفر

وثانيا اذا فرض ان ح يدل على عدد دون الواحد مبين بالكسر $\frac{1}{\text{ى}}$ (بفرض ى عددا اكبر من الواحد) تؤول المعادلة $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ الى $\text{ص} = \left(\frac{1}{\text{ى}}\right)^{\text{س}} = \frac{1}{\text{ى}^{\text{س}}}$ فاذا اخذ س جميع المقادير من ابتداء الصفر الى $+\infty$ اخذ $\text{ى}^{\text{س}}$

جميع

جميع الاعداد من الواحد الى + ∞ فحينئذ تكون جميع مقادير صـ محصورة بين الواحد والصفر واذا اخذ المتغير سـ مقادير من ابتداء الصفر الى ـ ∞ اخذ $\text{ى}^{\text{سـ}}$ جميع الاعداد المحصورة بين الواحد والصفر فحينئذ يكون للمتغير صـ جميع الاعداد من ابتداء الواحد الى + ∞

(١٠٧) حيث تقرر انه يمكن تكوين جميع الاعداد من القوى المتنوعة لعدد ثابت يطلق اسم لوغاريتم هذه الاعداد على اسس القوى المتنوعة المذكورة المساوية لجميع الاعداد بالتناظر وحينئذ يكون كل مقدار للمتغير سـ فى المعادلة $\text{صـ} = \text{حـ}^{\text{سـ}}$ لوغاريتما للمقدار المطابق له من مقادير صـ (بفرض حـ عددا موجبا ويسمى اساس الجملة اللوغاريتمية) واذا يوضع

سـ = لوغا صـ

(١٠٨) اذا فرض ان صـ و صَـ و صُـ و ... الخ رموز لاعداد و سـ و سَـ و سُـ و .... الخ رموز للوغاريتماتها بالنسبة لجملة اساسها حـ حدث

$$\text{صـ} = \text{حـ}^{\text{سـ}} \ \text{و} \ \text{صَـ} = \text{حـ}^{\text{سَـ}} \ \text{و} \ \text{صُـ} = \text{حـ}^{\text{سُـ}} \ \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{\text{صـ}}{\text{صَـ}} = \text{حـ}^{\text{سـ}-\text{سَـ}} \ \text{و} \ \text{صـ}^{\text{م}} = \text{حـ}^{\text{م}\,\text{سـ}} \ \text{و} \ \sqrt[\text{م}]{\text{صـ}} = \text{حـ}^{\frac{\text{سـ}}{\text{م}}}$$

ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة الاسس

$$\text{صـ} \times \text{صَـ} \times \text{صُـ} \ \text{.... الخ} = \text{حـ}^{\text{سـ}+\text{سَـ}+\text{سُـ}+\text{... الخ}} \ \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{لوغا صـ صَـ صُـ ... الخ} = \text{سـ} + \text{سَـ} + \text{سُـ} + \text{.... الخ} \ \text{و}$$

$$\text{لوغا} \frac{\text{صـ}}{\text{صَـ}} = \text{سـ} - \text{سَـ} \ \text{و} \ \text{لوغا صـ}^{\text{م}} = \text{م}\,\text{سـ} \ \text{و} \ \text{لوغا} \sqrt[\text{م}]{\text{صـ}} = \frac{\text{سـ}}{\text{م}}$$

فحينئذ يكون لوغا صـ صَـ صُـ .... الخ = لوغا صـ + لوغا صَـ + لوغا صُـ + ... الخ

و لوغا $\frac{صـ}{صَـ}$ = لوغا صـ ــ لوغا صَـ .

و لوغا صـ^{م} = م لوغا صـ و لوغا $\sqrt[م]{صـ}$ = $\frac{لوغا صـ}{م}$

وهذه المتساويات الاربع تستنبط منها قواعد

الاولى ان لوغاريتم حاصل ضرب يكون مساويا لمجموع لوغاريتمات مضاربيه

الثانية ان لوغاريتم خارج قسمة عددين يكون مساويا للوغاريتم المقسوم مطروحا منه لوغاريتم المقسوم عليه

الثالثة ان لوغاريتم اى قوة لاى عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضروبا فى درجة القوة المذكورة

الرابعة ان لوغاريتم جذر اى عدد يكون مساو للوغاريتم هذا العدد مقسوما على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغاريتم اى كسر يكون مساويا للوغاريتم بسطه مطروحا منه لوغاريتم مقامه وينتج من القاعدتين الاوليين ان لوغاريتم الحد الرابع من متناسبة يكون مساويا لمجموع لوغاريتمى الوسطين مطروحا منه لوغاريتم الحد الاول

(١٠٩) يؤخذ من تعريف اللوغاريتم ومما تقدم فى (بند ١٠٦)

اولا ان الاساس فى كل جملة لوغاريتمية يكون مساويا للواحد ويكون لوغاريتم الواحد مساويا للصفر

وثانيا ان الاساس اذا كان اكبر من الواحد كانت لوغاريتمات الاعداد التى فوق الواحد موجبة ولوغاريتمات الاعداد التى دون الواحد سالبة ولوغاريتم الصفر ــ ∞

وثالثا اذا كان الاساس دون الواحد كانت لوغاريتمات الاعداد التى فوق الواحد سالبة ولوغاريتمات الاعداد التى دون الواحد موجبة ولوغاريتم الصفر + ∞

(١١٠) حيث ان اللوغاريتمات لا تستعمل عادة الا لاختصار الاعمال الرقمية فلا يعتبر هنا غير لوغاريتمات الاعداد الموجبة ويفرض دائما ان الاساس يكون موجبا وحينئذ لا يكون للاعداد السالبة لوغاريتمات

(١١١) اذا فرضت متوالية هندسية حدها الاول الواحد واساسها كمية تختلف عن الواحد بقليل وحدودها تاخذ فى الزيادة بمقادير صغيرة جدا تكاد لا تدرك بحيث تكون محتوية على جميع الاعداد وفرضت ايضا متوالية عددية حدها الاول الصفر واساسها كمية صغيرة جدا تكاد لا تدرك باعتبار هاتين المتواليتين مكتوبتين على وجه به تكون حدود المتوالية العددية موضوعة تحت حدود المتوالية الهندسية ويكون صفر المتوالية العددية محاذيا للحد (١) من المتوالية الهندسية كان كل حد من حدود المتوالية العددية لوغاريتم الحد المحاذى له من المتوالية الهندسية لان حدود المتوالية الهندسية عبارة عن القوى المتنوعة المتقاربة من بعضها جدا لاساسها وحدود المتوالية العددية عبارة عن اسس تلك القوى وصورة وضع المتواليتين هكذا

∺ ... $ك^{-3}$: $ك^{-2}$: $ك^{-1}$: ١ : $ك^{1}$: $ك^{2}$: $ك^{3}$: ... الخ

÷ ... ٣- . ٢- . ١- . صفر . ١ . ٢ . ٣ . ... الخ

(فى اللوغاريتمات التى اساسها ١٠)

(واستعمال الجداول اللوغاريتمية)

(١١٢) بمقتضى ما تقرر اذا تكونت جميع قوى عدد ١٠ فان الاعداد ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠ و ... الخ تكون لوغاريتماتها ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ... الخ واما لوغاريتمات

الاعـداد التي ليست من القوى الصحيحة لعـدد ١٠ فانها تتعين بعـدد اعشارى واما الجزء الصحيح للوغاريتم عددا اكبر من الواحد فانه يحتوى على عدة من الآحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصا واحدا لانا اذا رمزنا لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز ن كان العدد محصورا بين ١٠^ن و ١٠^ن-١ وبناء على ذلك يكون لوغاريتمه محصورا بين ن ــ ١ و ن وحينئـذ يكون مركبا من آحاد عددها ن ــ ١ ومن جزء اعشارى اقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغاريتم اسم العدد البيانى

(فى المتمم اللوغاريتمى)

المتمم اللوغاريتمى لعدد هو لوغاريتم مقلوب هذا العدد ويقال لاحد العددين مقلوب الآخر متى كان حاصل ضربهما مساويا للواحد فنحو ٣ او ٣/١ و ١/٣ يقال لكل منهما مقلوب الآخر وعليه اذا رمز بالرمز ح لعدد مقلوبه ١/ح يحدث

ح × ١/ح = ١

وباخذ لوغاريتم كل من الطرفين يحدث

لوغا ح + لوغا ١/ح = لوغا ١ = ٠ ومنها يؤخذ

لوغا ١/ح = ــ لوغا ح

اعنى ان المتمم اللوغاريتمى لعدد يساوى لوغاريتم العدد بعلامة مخالفة لعلامته وحيث ان الجداول اللوغاريتمية لا تحتوى الا على لوغاريتمات الاعـداد الصحيحة يلزم لايجاد لوغاريتم كسر ان تطبق عليـه القاعدة المتقدمة فى (بند ١٠٨) ومتى كان الكسر المفروض اقل من الواحد امكن تعيين لوغاريتمه السالب على وجه به يكون جزؤه الاعشارى موجبا ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار على لوغاريتم البسط عدد من الآحاد حتى يتيسر ان يطرح منه لوغاريتم المقام ويطرح هذا العـدد من الباقى مثال ذلك ان يكون لوغاريتم البسط ٢٣٤٩٥٨٦٢ و١ ولوغاريتم المقام ٣و٦١٧٢٤٨٥ فيلزم ان يطرح

اللوغاريتم

اللوغاريتم الثانى من الاول بعد ان يضاف اليه ٣ فيحدث ٥ر٧٦٥٣١٠١
وحيث انه يلزم ان يطرح ٣ من هذا الباقى يكتب هكذا

$\overline{٣}$ر٧٦٥٣١٠١

والعلامة ـــ الموضوعة فوق العدد البيانى لا تتعلق بغيره

فاذا اريد تغيير المقدار ٧٦٥٣١٠١ ر$\overline{٣}$ بآخر مكافىء له الا انه سالب

شوهد ان ٧٦٥٣١٠١ ر $\overline{٣}$ = ـــ ٣ + ٠ر٧٦٥٣١٠١ =
ـــ ٢ ـــ (١ ـــ ٠ر٧٦٥٣١٠١) = ـــ ٢ر٢٣٤٦٨٩٩ وهذا
التحويل يؤخذ من طرح واحد من المقدار المطلق للعدد البيانى وطرح الرقم
الاول عن يمين الجزء الاعشارى من ١٠ وباقى الارقام الاعشارية
من ٩
ويلزم لتحويل لوغاريتم سالب بالكلية الى مقدار جزؤه الاعشارى موجب
(اى الى المتمم اللوغاريتمى) ان يجرى على الجزء الاعشارى من اللوغاريتم
السالب ما اجرى عليه فى الحالة السابقة ويضاف الى العدد البيانى واحد لان
ـــ ٢ر٢٣٤٦٨٩٩ = ـــ ٢ ـــ ٠ر٢٣٤٦٨٩٩ =

ـــ ٣ + (١ ـــ ٠ر٢٣٤٦٨٩٩) = $\overline{٣}$ر٧٦٥٣١٠١

واذا اريد ضرب اللوغاريتم ٧٦٥٣١٠١ ر$\overline{٣}$ فى عدد صحيح كالعدد
٤ مثلا فان حاصل الضرب يكتب هكذا

٤ × ٠ر٧٦٥٣١٠١ + ٤ × ـــ ٣ أو ٣ر٠٦١٢٤٠٤ و $\overline{٩}$ ومتى
كان اللوغاريتم مركبا من عدد بيانى سالب وجزء اعشارى موجب واريد
قسمته على عدد صحيح لزم ان يؤخذ خارج قسمة العدد البيانى على وجه به

يكون الباقى موجبا مثال ذلك ان يقسم $\overline{٧}$ر٣٢٩٥٦٤٢ على ٣ فيكون
خارج قسمة ـــ ٧ على ٣ هو ـــ ٢ والباقى ـــ ١ او خارج القسمة

ـــ ٣ والباقى + ٢ وبادامة العمل يحدث ٣ر٧٧٦٥٢١٤ وهو الناتج المطلوب

(١١٣) يؤخذ من القواعد المتقدمة فى (بند ١٠٨) ان

لوغا (ح × ١٠^ن) = لوغا ح + لوغا ١٠^ن = لوغا ح + ن و

لوغا (ح / ١٠^ن) = لوغا ح ــ لوغا ١٠^ن = لوغا ح ــ ن

ومن هنا ينتج ان لوغاريتم حاصل ضرب عدد فى القوى الصحيحة لعدد ١٠ او خارج قسمته عليه يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضافا اليه او مطروحا منه احاد صحيحة بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

وحينئذ يسهل معرفة العدد البيانى للوغاريتم عدد اعشارى اصغر من الواحد لانه اذا رمز بالرمز ع لعدد الاصفار الموجودة بين الشرطة واول رقم معنوى يوجد عن يمينها كان العدد المفروض اصغر من ١/١٠^ع واكبر من ١/١٠^(ع+١) وحينئذ يكون لوغاريتم هذا العدد محصورا بين ــ ع و ــ(ع+١) اعنى ان هذا اللوغاريتم يكون مساويا ــ (ع + ١) مضافا اليه جزء اعشارى موجب او مساويا ــ ع مضافا اليه جزء اعشارى سالب ومن هنا ينتج

اولا انه متى كان الجزء الاعشارى للوغاريتم عدد اعشارى اصغر من الواحد موجبا كان عدده البيانى مساويا للعدد الدال على مرتبة اول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة من العدد المفروض

وثانيا انه متى كان اللوغاريتم سالبا بالكلية كان عدده البيانى اقل بواحد من العدد الدال على مرتبة اول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة فى العدد المفروض وعلى ذلك يكون العدد البيانى الموجب او السالب للوغاريتم دالا على اعظم احاد العدد الذى ينسب اليه هذا اللوغاريتم

فى استعمال

فى استعمال الجداول اللوغاريتمية
فى العمليات الحسابية

(١١٤) استعمال هذه الجداول فى العمليات الحسابية يرجع الى مسالتين
(الاولى) ان يكون المعلوم عددا والمطلوب ايجاد لوغاريتمه
(الثانية) ان يكون المعلوم لوغاريتم عدد والمطلوب ايجاد هذا العدد
ويكفى فى ذلك ان نشرح جدول اللوغاريتمات المعرب مطبقا عليه المسئلتان المذكورتان فنقول

(فى شرح جدول اللوغاريتمات المعرب واستعماله)

(١١٥) هذا الجدول يتركب من ثلاثة اجزاء احدها يشتمل على لوغاريتمات الاعداد من الواحد الى ١٠٠٨٠ وهو عبارة عن اربع وثمانين صحيفة كل صحيفة مشتملة على ستة صفوف رأسية معنونة على التوالى بلفظتى اعداد وانساب اى لوغاريتمات وكل صف مقسوم الى ثمانية اقسام كل منها يشتمل على خمسة اعداد والصف المعنون بلفظة انساب يوجد تلو الصف المعنون بلفظة اعداد عن يساره بحيث يرى كل عدد من الاول موضوعا على يسار العدد المنسوب اليه من الثانى وجميع اعداد الصف المعنون بلفظة انساب مركب من ثمانية ارقام اولها من جهة اليسار العدد البيانى والارقام السبعة الباقية هى الجزء الاعشارى من اللوغاريتم وجميع الاعداد البيانية هى الارقام الموضوعة فى كل صف تحت العلامة ⌒ الموضوعة تحت لفظة انساب فى رأس كل صف من جهة اليسار ولنشرع فى تطبيق الجدول المذكور على المسألتين المذكورتين فنقول

(المسئلة الاولى العملية)

(١١٦) اذا كان المطلوب تحصيل اللوغاريتم المنسوب لعدد معلوم يقال اولا اذا كان العدد المعلوم صحيحا واصغر من ١٠٠٨٠ لزم ان يبحث عنه فى الصف المعنون بلفظة اعداد ويؤخذ العدد المحاذى له الذى يوجد على يساره من الصف المعنون بلفظة انساب فيكون هذا العدد هو اللوغاريتم

المطلوب

مثال ذلك ان يكون العدد المفروض ٤٥١٧ فيبحث عنه فى الصفوف المعنونة بلفظة اعداد فيتشاهد انه العدد الثانى من اعداد القسم الثامن من الصف الثالث المعنون بلفظة اعداد من (صحيفة ٣٩) وحينئذ يكون العدد ٣،٦٥٤٨٥٠١ الموضوع على يسار ٤٥١٧ هو اللوغاريتم المطلوب الذى يوضع هكذا لوغا ٤٥١٧ = ٣،٦٥٤٨٥٠١ فحينئذ يكون

لوغا ١٠ = ١،٠٠٠٠٠٠٠ و لوغا ٣١٥ = ٢،٤٩٨٣١٠٦

ولوغا ١٥ = ١،١٧٦٠٩١٣ و لوغا ٨٩١٥ = ٣،٩٥٠١٢١٣

وثانيا اذا كان العدد المعلوم صحيحا واكبر من ١٠٠٨٠ لزم تحويله الى عدد اعشارى محصور بين ١٠٠٠ و ١٠٠٨٠

مثال ذلك ان يكون المطلوب تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيقال حيث ان ١٨٩٣٦٧ = ١٨٩٣،٦٧ × ١٠٠ يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ بمقتضى (بند ١١٣) مساويا للوغاريتم العدد ١٨٩٣،٦٧ مضافا اليه العدد ٢، وبناء على ذلك يكتفى لتعيين اللوغاريتم المطلوب ان يعين لوغاريتم العدد ١٨٩٣،٦٧ بهذه المثابة وهى ان يقال

حيث ان العدد ١٨٩٣،٦٧ محصور بين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ يكون لوغاريتمه محصورا بين اللوغاريتمين الجدوليين ٣،٢٧٧١٥٠٦ و ٣،٢٧٧٣٨٠٠ المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ثم انه يلزم ايجاد الكمية س التى يراد اضافتها الى اللوغاريتم ٣،٢٧٧١٥٠٦ المنسوب للعدد ١٨٩٣ ليتكون من ذلك لوغاريتم العدد ١٨٩٣،٦٧ بان يؤخذ الفرق ٠،٠٠٠٢٢٩٤ بين اللوغاريتمين الجدوليين المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ويقال ان نسبة الفرق ١ بين العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ المتواليين الحاصرين بينهما العدد ١٨٩٣،٦٧ الى الفرق ٠،٦٧ بين العدد المعلوم والعدد ١٨٩٣،٦٧ كنسبة الفرق ٠،٠٠٠٢٢٩٤ بين اللوغاريتمين الجدوليين المنسوبين للعددين

الحاصرين

الحاصرين بينهما العدد المعلوم الى الفرق س بين اصغر اللوغاريتمين الجدولين واللوغاريتم المطلوب اعنى

١ : ٠,٦٧ :: ٠,٠٠٠٢٢٩٤ : س فحينئذ س = ٠,٠٠٠١٥٣٧

ثم يضاف مقدار س الى اللوغاريتم ٣,٢٧٧١٥٠٦ المنسوب للعدد ١٨٩٣ فالمجموع ٣,٢٧٧٣٠٤٣ يكون لوغاريتما للعدد ١٨٩٣,٦٧ فحينئذ يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ هو ٥,٢٧٧٣٠٤٣ وبهذه المثابة يتعين لوغاريتم اى عدد صحيح

وثالثا اذا اريد تعيين لوغاريتم كسر اعتيادى لزم ان يطرح لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام كما تقدم فى (بند ١٠٨)

لكن اذا كان الكسر اكبر من الواحد اجريت عملية الطرح كما ذكر فيكون الباقى هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان الكسر دون الواحد لزم ان يطرح لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام ثم يقرن الباقى بعلامة ـ فيكون الناتج لوغاريتما للكسر المفروض

تنبيه * اذا كان المطروح اكبر من المطروح منه وجب ان يطرح الاصغر من الاكبر ثم يقرن الباقى بعلامة ـ فبناء على ذلك يكون

لوغا $\frac{١٥}{٧}$ = ٠,٣٣٠٩٩٣٣ و لوغا $\frac{٧}{١٥}$ = ـ ٠,٣٣٠٩٩٣٣

ورابعا اذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم عدد اعشارى يقال حيث ان العدد الاعشارى يكافى كسرا اعتياديا بسطه العدد الصحيح الحادث من تجريد العدد المفروض من الشرطة ومقامه واحد متبوع باصفار عددها كعدد الارقام الاعشارية الموجودة على يمين الشرطة فبمقتضى ما تقرر فى تعيين لوغاريتم كسر اعتيادى يلزم لتحصيل لوغاريتم عدد اعشارى ان يعين لوغاريتم العدد الصحيح الحادث من حذف الشرطة من العدد المفروض ويطرح منه آحاد بقدر الارقام الاعشارية الموجودة فى العدد المفروض لان لوغاريتم الواحد المتبوع بجملة اصفار هو عدد الاصفار المذكورة كما فى (بند ١١٣)

لكن اذا كان العدد الاعشارى المفروض اكبر من الواحد كان لوغاريتمه موجبا فاذا كان المطلوب مثلا تعيين لوغاريتم العدد ١٨ر٩٣٦٧ لزم ان يبحث عن اللوغاريتم ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ المنسوب للعدد ١٨٩٣٦٧ ويطرح منه الرقم ٤ فيكون الباقى ١ر٢٧٧٣٠٤٣ هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان العدد الاعشارى المفروض اصغر من الواحد كان لوغاريتمه سالبا فاذا كان المطلوب مثلا تعيين لوغاريتم العدد ٠ر٠٠١٨٩٣٦٧ لزم ان يقطع النظر فى مبدأ الامر عن الشرطة ويبحث عن لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيكون ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ وحيث ان العدد المعلوم مركب من ثمانية ارقام اعشارية يلزم لتحصيل لوغاريتمه ان يطرح من اللوغاريتم ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ الرقم ٨ وبناء على ذلك يكون العدد ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ــ٨ هو اللوغاريتم المطلوب ويلزم لايجاد الباقى المذكور ان يطرح ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ من ٨ ويقرن الباقى بعلامة ــ فيكون الناتج ــ ٢ر٧٢٢٦٩٥٧ هو لوغاريتم العدد ٠ر٠٠١٨٩٣٦٧

ويمكن ايضا كما فى (بند ١١٢) تحويل اللوغاريتم ــ ٢ر٧٢٢٦٩٥٧ الى لوغاريتم عدده البيانى سالب فقط بملاحظة ان لوغا ٠ر٠٠١٨٩٣٦٧ = ٥ر٢٧٧٣٠٤٣ ــ ٨ = ٥ + ٠ر٢٧٧٣٠٤٣ ــ ٨ = ٥ ــ ٨ + ٠ر٢٧٧٣٠٤٣ = ٣ــ + ٠ر٢٧٧٣٠٤٣ = ٣ر٢٧٧٣٠٤٣ والعلامة ــ الموضوعة فوق العدد ٣ تدل على انه سالب فقط

(المسئلة الثانية العملية)

(١١٧) اذا علم لوغاريتم وكان المطلوب تعيين العدد الذى ينسب اليه يقال اولا اذا كان اللوغاريتم المعلوم موجبا كان العدد المنسوب اليه اكبر من الواحد وحينئذ يكون العدد البيانى بعد ان يضاف اليه واحد دالا كما فى (بند ١١٣) على عدد ارقام الجزء الصحيح من العدد المنسوب الى اللوغاريتم المعلوم

اذا تقرر ذلك يقال اذا كان العدد البيانى للوغاريتم معلوم قدره ٣ كان

العدد

العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم محصورا بين ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠
ولتحصيل هذا العدد يبحث عن اللوغاريتم المعلوم فى الصفوف المعنونة بلفظة
انساب فان وجد اللوغاريتم المذكور فى الجدول كان العدد المنسوب اليه
موضوعا على يمينه فى الصف المعنون بلفظة اعداد

وبناء على ذلك يشاهد ان اللوغاريتمات ٣٫٦٥٦٠٩٨٣ و ٣٫٢٧٧١٥٠٦
و ٣٫٢٧٧٣٨٠٠ منسوبة للاعداد ٤٥٣٠ و ١٨٩٣
و ١٨٩٤

واذا كان اللوغاريتم المعلوم الذى عدده البيانى ٣ ليس موجودا فى الجدول
لزم حصره بين لوغاريتمين متوالين جدوليين منسوبين لعددين صحيحين
متوالين فيكون اصغر هذين العددين هو الجزء الصحيح من العدد الاعشارى
المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

واما الجزء الاعشارى المنسوب للعدد المطلوب فيتعين بهذه الكيفية وهى ان
يقال نسبة الفرق بين اللوغاريتمين الجدوليين الحاصرين بينهما اللوغاريتم
المعلوم الى الفرق بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدوليين كنسبة
واحد الى الجزء الاعشارى س المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

ومقدار س المستخرج من هذه المتناسبة يكون فى العادة مبينا بثلاثة
ارقام فاذا كان المعلوم اللوغاريتم ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

شوهد فى الجدول ان هذا اللوغاريتم محصور بين اللوغاريتمين ٣٫٢٧٧١٥٠٦
و ٣٫٢٧٧٣٨٠٠ المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من العدد المطلوب هو ١٨٩٣ واما
الجزء الاعشارى من هذا العدد فيلزم لتعيينه ان يبحث فى مبدأ الامر عن
الفرق ٠٫٠٠٠٢٢٩٤ بين لوغاريتمى العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
ثم عن الفرق ٠٫٠٠٠١٥٣٧ بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين
الجدوليين ثم توضع المتناسبة

٠٫٠٠٠٢٢٩٤ : ٠٫٠٠٠١٥٣٧ :: أ : س او

٢٢٩٤ : ١٥٣٧ :: أ : س

ومنها يحدث س = ٠٫٦٧٠

وبناء على ذلك يكون العدد المطلوب هو ١٨٩٣٫٦٧ فاذا زاد العدد البيانى للوغاريتم المعلوم الموجب غير الموجود فى الجدول او نقص عن العدد ٣ لزم تحويله الى الحالة السابقة وذلك بان تطرح من العدد البيانى او تضاف اليه آحاد الى ان يصير مساويا للرقم ٣ ثم يبحث عن العدد المنسوب للوغاريتم الجديد (محسوبا مع ثلاثة ارقام اعشارية) ثم تقدم الشرطة او تؤخر جهة اليمين او اليسار منازل بعدد الآحاد المضافة الى العدد البيانى او المطروحة منه فاذا علم اللوغاريتم ١٫٢٧٧٣٠٤٣ مثلا لزم فى مبدأ الامر ان يضاف الرقم ٢ للعدد البيانى ١ فيحدث ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ ثم يبحث عن العدد المنسوب اليه ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ فيشاهد انه ١٨٩٣٫٦٧ ثم تقدم الشرطة جهة الشمال منزلتين (لان الرقم ٢ قد اضيف الى العدد البيانى) فيحدث ١٨٫٩٣٦٧ وهو العدد المطلوب

وثانيا اذا كان اللوغاريتم المعلوم كله سالبا لزم ان تضاف احاد كافية لجعل الناتج موجبا عدده البيانى ٣ اعنى انه يلزم ان يضم اليه ٤ آحاد فى النهاية ثم يبحث عن العدد الذى ينسب الى هذا اللوغاريتم الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الآحاد التى اضيفت الى اللوغاريتم المعلوم فاذا اريد ايجاد العدد الذى ينسب الى اللوغاريتم — ٢٫٧٢٢٦٩٥٧ السالب مثلا لزم ان يضاف ٢+٤ اى ستة آحاد الى — ٢٫٧٢٢٦٩٥٧ فيكون المجموع ٦ — ٢٫٧٢٢٦٩٥٧ اى ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ ثم يبحث عن العدد ١٨٩٣٫٦٧ المنسوب الى اللوغاريتم ٣٫٢٧٧٣٠٤٣ ثم تقدم الشرطة جهة اليسار ستة منازل (لاننا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المعلوم) فيكون الناتج ٠٫٠٠١٨٩٣٦٧ هو العدد المطلوب

وثالثا اذا كان العدد البيانى سالبا لزم ان تضاف اليه احاد كافية لجعله

موجبا

موجبا ومساويا للرقم ٣ ثم يبحث عن العدد المنسوب الى هذا اللوغاريتم الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الآحاد التى اضيفت الى العدد البيانى فاذا اريد ايجاد العدد الذى لوغاريتمه ٣،٢٧٧٣٠٤٣ مثلا نتج مما تقدم ان ٣،٢٧٧٣٠٤٣ = — ٣ + ٠،٢٧٧٣٠٤٣ وبناء على ذلك اذا اضفنا الرقم ٦ للوغاريتم المعلوم صار الناتج ٣،٢٧٧٣٠٤٣ (لان ٠،٢٧٧٣٠٤٣ — ٣ بعد اضافة الرقم ٦ اليه يصير ٠،٢٧٧٣٠٤٣ + ٦ — ٣) ثم يبحث عن العدد الذى ينسب اليه هذا الناتج فيشاهد انه ١٨٩٣،٦٧ ثم تقدم الشرطة ستة منازل جهة اليسار (لاننا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المفروض) فيكون الناتج ٠،٠٠١٨٩٣٦٧ هو العدد المطلوب

(١١٨) هذا ما يتعلق بالجزء الاول وهو المشتمل على لوغاريتمات الاعداد من ١ الى ١٠٠٨٠ واما الجزآن الآخران فلم نتصد لذكرهما هنا لتوقفهما على امور خاصة بعلم حساب المثلثات فمن اراد الوقوف على حقيقتهما فعليه بالاطلاع على العلم المذكور

(الباب الخامس)

في مسائل يحلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تمرن التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهى مرتبة بحسب ترتيب قواعده

(مسائل تخص الدرجة الاولى)

(المسئلة الاولى)

كومتان من القلل محتويتان على ٣٤٤ قلة تزيد احداهما عن الاخرى بمقدار ٦٤ قلة فما يكون عدد القلل الموجودة في كلتيهما

فالجواب عن ذلك ان يفرض س عدد القلل الموجودة في صغرى الكومتين فيكون س + ٦٤ عدد القلل الموجودة في الكومة الكبرى فبناء على ما تقدم يحصل

س + س + ٦٤ = ٣٤٤ اى

٢ س + ٦٤ = ٣٤٤ ومنها يستخرج

س = ١٤٠ قلة وهو العدد الاصغر

وحيث كان العدد الاكبر مساويا للكمية س + ٦٤ يكون مساويا للكمية ١٤٠ + ٦٤ المساوية للكمية ٢٠٤ بمعنى انه يوجد في احدى الكومتين ١٤٠ قلة وفي الاخرى ٢٠٤ وتحقيق ذلك ان مجموعهما يساوى ٣٤٤ وفاضلهما يساوى ٦٤

(المسئلة الثانية)

ثلاث قلل عيار الاولى ١٢ بوصه والثانية ١٠ بوصات والثالثة ٨ وزنة الجميع ١٤٣ كيلوجراما لكن الاولى تزيد عن الثانية بمقدار ٢٢ كيلوجراما والثانية عن الثالثة بمقدار ٢٩ كيلوجراما فما تكون زنة كل قلة من القلل الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يقال اذا رمزنا بالحرف س لزنة القلة التى عيارها ٨ بوصات يكون س + ٢٩ زنة القلة التى عيارها ١٠ بوصات و س + ٢٩ + ٢٢ اى س + ٥١ زنة

القلة التي عيارها ١٢ بوصة وحيث كانت زنة الثلاث قلل تبلغ ١٤٣ كيلوجراما يحدث

$$س + س + ٢٩ + س + ٥١ = ١٤٣$$ او

$$٣ س + ٨٠ = ١٤٣$$ ومنها يستخرج

$$س = ٢١$$

يعني ان زنة القلة التي عيارها ٨ بوصات يكون ٢١ كيلوجراما فتكون حينئذ زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات ٢١ + ٢٩ اى ٥٠ كيلوجراما وزنة القلة الثالثة التي عيارها ١٢ بوصه ٥٠ + ٢٢ اى ٧٢ كيلوجراما وتحقيق ذلك ان زنة الثلاث قلل تساوى ١٤٣ كيلوجراما

(المسئلة الثالثة)

اذا كان المطلوب قسمة ٢١٣٧٥ خرطوشا على ثلاث فرق من العساكر قواها مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ١١ اى ان قوة الاولى على $\frac{٣}{٥}$ قوة الثانية وعلى $\frac{٣}{١١}$ من قوة الثالثة

فالجواب عن ذلك ان يفرض ان ٣س عدد الخراطيش اللازمة للفرقة الاولى و ٥س عدد خراطيش الثانية و ١١س عدد خراطيش الفرقة الثالثة (وانما اخترنا هذه الفروض للفرق الثلاثة لوجهين الاول ان ٣س عبارة عن $\frac{٣}{٥}$ العدد ٥س وعن $\frac{٣}{١١}$ من العدد ١١س والثانى تناسب هذه الفروض مع الاعداد ٣ و ٥ و ١١) فحيث كان مجموع هذه الاجزاء الثلاثة يعادل ٢١٣٧٥ يحدث

$$٣ س + ٥ س + ١١ س = ٢١٣٧٥$$ اى

$$١٩ س = ٢١٣٧٥$$ ومنها يستخرج

$$س = \frac{٢١٣٧٥}{١٩} = ١١٢٥$$

وحينئذ يكون ما يخص الفرقة الاولى ٣ × ١١٢٥ اى ٣٣٧٥ خرطوشا وما يخص الثانية ٥×١١٢٥ اى ٥٦٢٥ وما يخص الثالثة

١١ × ١١٢٥ اى ١٢٣٧٥ وتحقيق ذلك ان المجموع يساوى ٢١٣٧٥ وهاك طريقة اخرى للحل هى

ان يرمز بالحرف س لعدد خراطيش الفرقة الاولى فيكون $\frac{٥س}{٣}$ هو عدد خراطيش الفرقة الثانية و $\frac{١١س}{٣}$ عدد خراطيش الفرقة الثالثة ومن ذلك تحدث هذه المعادلة س + $\frac{٥س}{٣}$ + $\frac{١١س}{٣}$ = ٢١٣٧٥ وبحل هذه المعادلة واستخراج مقدار س منها يوجد س = ٣٣٧٥ خرطوشا فحينئذ يكون عدد خراطيش الفرقة الثانية ٥٦٢٥ وعدد خراطيش الفرقة الثالثة ١٢٣٧٥

(المسئلة الرابعة)

اذا كان المطلوب معرفة اللحظات التى يتلاقى فيها عقربا الساعات والدقائق لساعة ما

فالجواب عن ذلك ان يقال من الواضح ان تلاقى العقربين قد يقع وقت الغروب فحينئذ لا حاجة لبيانه والغرض انما هو البحث عن التلاقيات الاخر المتتابعة الواقعة بعد التلاقى المذكور فنقول

يرمز بالحرف هـ للمحيط بتمامه وبالحرف س للمسافة التى قطعها عقرب الساعات من وقت الغروب الى وقت التلاقى الاول فيكون ١٢ س هى المسافة التى قطعها عقرب الدقائق فى الوقت المذكور وهذه المسافة عبارة عن المحيط زائد المسافة س اعنى ان ١٢ س = هـ + س ويستنتج من هذه المعادلة س = $\frac{هـ}{١١}$ وحيث ان عقرب الساعات يقطع المحيط بتمامه فى مدة ١٢ ساعة يقطع المسافة $\frac{هـ}{١١}$ فى $\frac{١٢}{١١}$ من الساعة اى فى $\frac{١}{١١}$ ١ ساعه وبناء على ذلك فلحظات التقابلات المتتابعة

من وقت الغروب ساعة $\frac{١}{١١}$ ١ ساعة $\frac{٢}{١١}$ ٢ ساعة $\frac{٣}{١١}$ ٣ ساعة $\frac{٤}{١١}$ ٤ ساعة $\frac{٥}{١١}$ ٥ ساعة $\frac{٦}{١١}$ ٦ ساعة $\frac{٧}{١١}$ ٧ ساعة $\frac{٨}{١١}$ ٨ ساعة $\frac{٩}{١١}$ ٩ ساعة $\frac{١٠}{١١}$ ١٠ ساعة $\frac{١١}{١١}$ ١١

وهاك

وهاك بعض مسائل بسيطة لتمرين المبتدى اقتصرنا على بيان نتائج حلها لتحقيق ما يجده الطالب

(المسئلة الاولى)

رجل عمره ثمانية امثال عمر ولده ومجموع عمريهما ٣٦ سنة فما يكون عمر كل منهما

فالجواب ان عمر الولد ٤ سنوات وعمر والده ٣٢ سنة

(المسئلة الثانية)

تلميذ ان ذهب الى المكتب اخذ مجازاة له ٨ ١ وان لم يذهب دفع عقابا له ٣٠ فبعد مضى ثلاثين يوما وجد معه ٣٠ ٦ فما يكون قدر ايام البطالة وقدر ايام الشغل

فالجواب ان قدر ايام الشغل ١٥ يوما كقدر ايام البطالة

(المسئلة الثالثة)

قلتان زنة احديهما ٣٦ رطلا وزنة الاخرى ٢٤ رطلا ومجموع قطريهما ٣١٥ مليميترا وفاضلهما ٢١ مليميترا فما مقدار كل من القطرين

فالجواب ان قطر الاولى ١٦٨ مليميترا وقطر الاخرى ١٤٧

(المسئلة الرابعة)

تاجر اشترى مقدار من الحطب وباعه فاكتسب مبلغا قدره ٢٠٠٠ معتبرا انه ربح فى كل مائة ١٠ من المبلغ المبيع به فما يكون قدر رأس ماله الذى اشترى به الحطب المذكور

فالجواب ان رأس المال ١٨٠٠٠

(المسئلة الخامسة)

مخلوط قدره ١٧ رطلا مركب من ١٥ رطلا من ملح البارود و ٢ من الكبريت فما تكون الكمية التى يلزم اضافتها على هذا المخلوط من ملح البارود بحيث يكون موجودا فى كل ١٧ رطلا من هذا المخلوط $\frac{1}{2}$ رطل من الكبريت فقط

فالجواب عن ذلك انه يلزم اضافة ٥١ رطلا من ملح البارود

ولنذكر مسائل مطبقة على حل معادلتين فاكثر بمجهولين فاكثر

(المسئلة الاولى)

جملتان من الدانات احداهما مركبة من ١٢ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٨ دانة عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٤٦٩٫٩٢٥ كيلوجراما والاخرى مركبة من ٢٠ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٥ عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٦٠٦٫٩٨٧ كيلوجراما فما تكون زنة كل دانة منها

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لزنة الدانة التي عيارها ٨ وبالحرف ص لزنة الدانة التي عيارها ٦ فتحدث هاتان المعادلتان

$$١٢ س + ١٨ ص = ٤٦٩٫٩٢٥ \quad و$$

$$٢٠ س + ١٥ ص = ٦٠٦٫٩٨٧$$

ولاستخراج س من هاتين المعادلتين تحذف ص منهما بان يستخرج

من الاولى $ص = \frac{٤٦٩٫٩٢٥ - ١٢س}{١٨}$

ومن الثانية $ص = \frac{٦٠٦٫٩٨٧ - ٢٠س}{١٥}$

وبتسوية هذين المقدارين ببعضهما تحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٦٩٫٩٢٥ - ١٢س}{١٨} = \frac{٦٠٦٫٩٨٧ - ٢٠س}{١٥} \quad اى$$

$$٧٠٤٨٫٨٧٥ - ١٨٠ س = ١٠٩٢٥٫٧٦٦ - ٣٦٠ س \quad ومنها$$

يستخرج $س = \frac{٣٨٧٦٫٨٩١}{١٨٠} = ٢١٫٥٣٨$ كيلوجراما

فاذا وضعنا بدل الحرف س مقداره المستخرج فى المعادلة الاولى ذات المجهولين يحدث

$$ص = \frac{٤٦٩٫٩٢٥ - ٢١٫٥٣٨ \times ١٢}{١٨} = \frac{٤٦٩٫٩٢٥ - ٢٥٨٫٤٥٦}{١٨} = ١١٫٧٤٨$$

كيلوجراما

(المسئلة الثانية)

مدفع عياره ١٦ مركب من نحاس وقصدير زنته ٢٠١٠٫٦٤٠ كيلوجراما أو ٢٠١٠٦٤٠ جراما وحجمه ٢٢٣ دسيمترا مكعبا

بفرض ان زنة الديسي ميتر المكعب من النحاس يساوى ٩٢٥٠ جراما وزنة الديسيمتر المكعب من القصدير يساوى ٧٣٢٠ جراما فما تكون زنة كل من النحاس والقصدير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لعدد الديسيمترات المكعبة من النحاس وبالحرف ص لعدد الديسيمترات المكعبة من القصدير فيحدث بالنظر للديسيمترات المكعبة هذه المعادلة س + ص = ٢٢٣ ويحدث بالنظر للزنة ٩٢٥٠ س + ٧٣٢٠ ص = ٢٠١٠٦٤٠

ثم يستخرج من المعادلة الاولى س = ٢٢٣ — ص ومن الثانية س = $\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ص}{٩٢٥٠}$ ومن هاتين المعادلتين يستنتج $\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ص}{٩٢٥٠}$ = ٢٢٣ — ص أو

ص = $\frac{٥٢١١٠}{١٩٣٠}$ = ٢٧

فعلى ذلك يوجد فى المدفع المذكور ٢٧ ديسيمترا مكعبا من القصدير و ٢٢٣ — ٢٧ اى ١٩٦ ديسيمترا مكعبا من النحاس

فاذا ضرب ٩٢٥٠ جراما فى ١٩٦ وجدان زنة النحاس ١٨١٣٠٠٠ جرام واذا ضرب ٧٣٢٠ جراما فى ٢٧ وجد ان زنة القصدير ١٩٧٦٤٠ جراما وتحقق ذلك ان زنة المجموع ٢٠١٠٦٤٠ جراما

(المسئلة الثالثة)

مائة اقة من بارود المدافع مكونة من ملح البارود والكبريت والفحم بشرط ان ثلاثة امثال زنة ملح البارود تعادل زنة الفحم ١٣ مرة مضافا عليها خمسة امثال زنة الكبريت وان خمسة امثال زنة الملح تعادل زنة الكبريت ٣٧ مرة مطروحا منها سبعة امثال زنة الفحم فما تكون زنة كل من المواد الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لزنة الملح الكائن فى المخلوط وبالحرف ص لزنة الكبريت كذلك وبالحرف ع لزنة الفحم كذلك فيحدث أولا

س + ص + ع = ١٠٠

ومن الشرط الاول   ٣ س = ٥ ص + ١٣ ع

ومن الشرط الثانى   ٥ س = ٣٧ ص — ٧ ع

وباستخراج س من الاولى والثانية والثالثة يحدث

س = ١٠٠ — ص — ع و

س = (٥ ص + ١٣ ع) / ٣ و

س = (٣٧ ص — ٧ ع) / ٥

وبتسوية اول مقدار بثانى مقدار ثم بثالث مقدار للمجهول س يحدث

(٥ ص + ١٣ ع) / ٣ = ١٠٠ — ص — ع و

(٣٧ ص — ٧ ع) / ٥ = ١٠٠ — ص — ع

وبحذف المقامات يحدث على التوالى

٥ ص + ١٣ ع = ٣٠٠ — ٣ ص — ٣ ع و

٣٧ ص — ٧ ع = ٥٠٠ — ٥ ص — ٥ ع

وبتحويل الحدود المشتملة على المجهول ص الى طرف واحد يحدث

٨ ص = ٣٠٠ — ١٦ ع و
٤٢ ص = ٥٠٠ + ٢ ع   ومنهما يحدث

ص = (٣٠٠ — ١٦ ع) / ٨ و

ص = (٥٠٠ + ٢ ع) / ٤٢

وبتسوية مقدارى ص ببعضهما تحدث معادلة تحتوى على المجهول ع
فقط يستنتج منها ع = ١٠٧٥ / ٨٦ = ١٢ ½ وهو مقدار المجهول المذكور
وبوضع ١٢ ½ بدل المجهول ع فى اول مقدار للمجهول ص يحدث

ص = (٣٠٠ — ٢٠٠) / ٨ = ١٢ ½

وبوضع ١٢ ½ بدل كل من المجهولين ص و ع فى اول مقدار للمجهول
س يحدث

س = ١٠٠ — ٢٥ = ٧٥

فعلى هذا تكون المائة اقه من بارود المدافع مركبة من ٧٥ اقه من ملح البارود ومن $\frac{1}{2}$ ١٢ من الكبريت و $\frac{1}{2}$ ١٢ من الفحم وبناء على ذلك فملح البارود الداخل فى تركيب بارود المدافع يكون $\frac{3}{4}$ المخلوط واما كل من الكبريت والفحم فيكون $\frac{1}{8}$ المخلوط

وهاك مسائل من هذا القبيل يراد حلها من الطلبة

(المسئلة الاولى)

٢١٩ فرنكا يطلب عملها ٦٠ قطعة من المصكوكات قيمة بعضها ٥ فرنكات وقيمة البعض الآخر ٢ فرنكان فكم يلزم عمله من الصنف الاول وكم يلزم عمله من الصنف الثانى

فالجواب انه يلزم عمل ٣٣ قطعة قيمة كل منها ٥ فرنكات و ٢٧ قطعة قيمة كل منها ٢ فرنكان

(المسئلة الثانية)

عربة فيها ٥٠ قلة عيار بعضها ١٢ اصبعا وعيار البعض الآخر ١٠ اصابع وزنة كل قلة من العيار الاول ٧٢ كيلوجراما وزنة كل قلة من العيار الثانى ٥٠ كيلوجراما وزنة مجموع القلل ٢٦٩٨ كيلوجراما فما يكون عدد القلل الموجود فى كل من النوعين

فالجواب عن ذلك ان عدد قلل العيار الاول ٩ قلات وعدد قلل العيار الثانى ٤١ قلة

(المسئلة الثالثة)

٦٠٠ تلميذ يشغلون اربعة ادوار من مدرسة بشرط ان تكون عدد تلاميذ الدور الاول ضعف عدد تلاميذ الدور الرابع وان مجموع تلاميذ الدور الثانى والثالث يعادل مجموع تلاميذ الدور الاول والرابع وان عدد تلاميذ الدور الثالث $\frac{5}{7}$ تلاميذ الدور الثانى فكم يوجد من التلاميذ فى كل دور من الادوار الاربعة المذكورة

فالجواب عن ذلك انه يوجد ٢٠٠ تلميذ فى الدور الاول و ١٧٥ فى الدور الثانى و ١٢٥ فى الثالث و ١٠٠ فى الرابع

(المسئلة الرابعة)

ثلاث صبر من خليط الغلال فى شونة واحدة كل مائة اوقه من الصبرة الاولى تحتوى على ٨٠ اوقه من القمح و ١٢ اقة من الذرة و ٨ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثانية تحتوى على ٧٥ اقة من القمح و ١٥ اقة من الذرة و ١٠ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثالثة تحتوى على ٦٠ اقة من القمح و ٢٠ اقة من الذرة و ٢٠ اقة من الشعير فما يلزم اخذه من كل صبرة لتكوين صبرة رابعة كل مائة اقة منها تحتوى على ٧٣ اقة من القمح و ١٥ من الذرة و ١٢ من الشعير

فالجواب عن ذلك ان ما يلزم اخذه من الصبرة الاولى ٥٠ اقة ومن الثانية ٢٠ اقة ومن الثالثة ٣٠ اقة

(مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة فى الدرجة الثانية)

(المسئلة الاولى)

من المقرر فى علم الطبيعة ان الاجسام الساقطة تقطع مسافات مناسبة لمربعات الازمنة الساقطة فيها فاذا قطع جسم ٤٫٩٠٤٥ امتار فى مدة سقوطه فى اول ثانية فما يكون مقدار الثوانى اللازمة لسقوط الجسم المذكور من ارتفاع قدره ١٣٢٫٥٣٤٧ ميترا

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لعدد الثوانى اللازمة لسقوط الجسم من الارتفاع المعين فتحدث هذه المتناسبة

$$\text{٤٫٩٠٤٥} : \text{١٣٢٫٥٣٤٧} :: \text{١}^2 : \text{س}^2$$ ومنها يستخرج

$$\text{س}^2 = \frac{\text{١٣٢٫٥٣٤٧}}{\text{٤٫٩٠٤٥}} = \frac{\text{١٣٢٥٣٤٧}}{\text{٤٩٠٤٥}} = \text{٢٧٫٠٢}$$ ومنها يستخرج

$$\text{س} = \pm\sqrt{\text{٢٧٫٠٢}} = \pm\ \text{٥٫٢}$$

ومقدارا

ومقدارا س معا يحققان المعادلة $س^2 = \frac{١٣٢٫٥٣٤٧}{٤٫٩٠٤٥}$ واما المقدار الموجب للمجهول س وهو ٢و٥ ثوان فهو حل المسئلة

(المسئلة الثانية)

يمكن اعتبار الحزم اللازمة لتماسك طابية كاسطوانات قائمة فاذا كان مقدار من المواد كاف لصناعة ٢٥ حزمة قطر قاعدة كل منها ٣٢٥ مليمترا واريد عمل المقدار المذكور ٣٦ حزمه طولها كطول حزم النوع الاول فما يكون قطر كل حزمة من هذا النوع الاخير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لقطر حزمة النوع الثانى وبالحرف م لحجم المقدار المذكور فيكون $\frac{م}{٢٥}$ هو حجم اسطوانة النوع الاول و $\frac{م}{٣٦}$ حجم اسطوانة النوع الثانى ومن حيث ان نسبة حجوم الاسطوانات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها كما هو مقرر فى الهندسة تحدث هذه المناسبة

$$\frac{م}{٢٥} : \frac{م}{٣٦} :: (٣٢٥)^2 : س^2$$ اى

$$٣٦ : ٢٥ :: ١٠٥٦٢٥ : س^2$$

فحينئذ

$$س^2 = \frac{١٠٥٦٢٥ \times ٢٥}{٣٦} = \frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}$$ ومنها يستخرج

$$س = \pm \sqrt{\frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}} = \pm \frac{\sqrt{٢٦٤٠٦٢٥}}{\sqrt{٣٦}} =$$

$$\pm \frac{١٦٢٥}{٦} = \pm ٢٧٠٫٨$$

وحينئذ يكون القطر المطلوب ٢٧١ مليمترا تقريبا او ١٠ اصابع

(المسئلة الثالثة)

من المعلوم ان خزنة الهون اسطوانة قائمة وان سعة خزنة الهون الذى عياره ١٢ اصبعا ٣٢٥ مليمترا مكعبا وان سعة خزنة الهون الذى

عباره ٨ اصابع تعادل ٢١٧ ميليمترا مكعبا فاذا كان قطر قاعدة

الهون الاول ١٢٦ ميليمترا اعنى ٨ غ ٤ ص نما يكون قطر الهون

الثانى بفرض ان عمق الخزنتين واحد وان خزنة الهون الاول تسع

اواق ط

١٦٩٣ جراما من البارود اى ٧ $\frac{1}{2}$ ٣ وان خزنة الهون الثانى تسع

اوقية ط

٦٣٥ جراما من البارود اى ٢٠ $\frac{1}{2}$ ٠٠

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للقطر المطلوب ويلاحظ ان نسبة حجوم الاسطوانات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها وان نسبة حجوم خزن الاهوان الى بعضها كنسبة زنات البارود المحتوية عليه هذه الخزن الى بعضها فتحدث هذه المتناسبة

$$١٦٩٣ : ٦٣٥ :: (١٢٦)^٢ : س^٢ \text{ اى}$$

$$\sqrt{١٦٩٣} : \sqrt{٦٣٥} :: ١٢٦ : س \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \frac{١٢٦ \times \sqrt{٦٣٥}}{\sqrt{١٦٩٣}} = ١٢٦ \sqrt{\frac{٦٣٥}{١٦٩٣}} =$$

$$١٢٦ \times \sqrt{٠{,}٣٧٥٠٧٤} = ١٢٦ \times ٠{,}٦١٢ = ٧٧ \text{ ميليمترا}$$

فحينئذ يكون القطر المطلوب ٧٧ ميليمترا اى ١٠ غ ٢ ص تقريبا .

(المسئلة الرابعة)

اذا كان ارتفاع الميل الداخلى لطابية استحكامات يعادل ٢,٢٧٤ م اى

اقدام

٧ وقاعدته تعادل ٠,٧٥٨ م اى ٢ ٤ ص ن اى ثلث الارتفاع فما

يكون طول هذا الميل

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لطول هذا الميل ويلاحظ ان

مربع طول الميل المذكور يعادل مجموع مربعي ارتفاعه وقاعدته كما هو مقرر في الهندسة فيحدث

$$\text{س}^2 = (2{,}274)^2 + (0{,}758)^2 \quad \text{اى}$$

$$\text{س}^2 = 5{,}745640 \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$\text{س} = \pm\sqrt{5{,}745640} = \pm\, 2{,}397$$

فحينئذ يكون طول الميل المذكور $2{,}397^{\text{م}}$

(المسئلة الخامسة)

ما العدد الذى اذا اضيف الى مربعه ١٣٢ يكون الناتج مساويا مقدار هذا العدد ٢٣ مرة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لهذا العدد فيحدث هذه المعادلة

$$\text{س}^2 + 132 = 23\,\text{س} \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$\text{س} = \frac{23}{2} \pm \sqrt{\frac{(23)^2}{4} - 132} = \frac{23}{2} \pm \sqrt{\frac{529-528}{4}} \quad \text{او}$$

$$\text{س} = \frac{23 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{23 \pm 1}{2}$$

واذا رمز لمقدارى س بالحرفين $\text{س}'$ و $\text{س}''$ يكون

$$\text{س}' = \frac{23+1}{2} = 12 \quad \text{و}$$

$$\text{س}'' = \frac{23-1}{2} = 11$$

فحينئذ كل من العددين ١٢ و ١١ يحقق منطوق المسئلة

(المسئلة السادسة)

الاى اشترى مقدارا من الخيل بمبلغ ٤٥٠٠٠ غرش وآخر اشترى مقدارا من الخيل يزيد عدده عن عدد خيل الالاى الاول ١٥ حصانا بمبلغ قدره ٦٤٠٠٠ غرش بفرض ان ثمن الحصان الواحد من خيل

الالاى الثانى ينقص عن ثمن الحصان الواحد من خيل الالاى الاول بمبلغ قدره ٢٠٠ غرش فكم يكون عدد خيول كل الاى وكم يكون ثمن كل حصان منها

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لعدد خيل الالاى الاول فيكون س + ١٥ عدد خيل الالاى الثانى و $\frac{٤٥٠٠٠}{س}$ ثمن كل حصان من خيل الالاى الاول و $\frac{٦٤٠٠٠}{س + ١٥}$ ثمن كل حصان من خيل الالاى الثانى فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٥٠٠٠}{س} = \frac{٦٤٠٠٠}{س + ١٥} + ٢٠٠$$

فاذا حذفت المقامات ثم اختصرت المعادلة وقسمت على مكرر المجهول ذى الدرجة الثانية حدث

$$س^٢ + ١١٠ س = ٣٣٧٥$$ ومنها يستخرج

$$س = - ٥٥ \pm \sqrt{(٥٥)^٢ + ٣٣٧٥}$$ او

$$س = -٥٥ \pm \sqrt{٣٠٢٥ + ٣٣٧٥} = -٥٥ \pm \sqrt{٦٤٠٠}$$ أو

$$س = -٥٥ \pm ٨٠$$ اى $س' = ٢٥$ و $س'' = -١٣٥$

اما مقدار $س' = ٢٥$ فانه يكون عدد خيل الالاى الاول وبناء على ذلك يكون العدد ٢٥ + ١٥ اى ٤٠ عدد خيل الالاى الثانى واما مقدار $س'' = -١٣٥$ فانه محقق للمعادلة فقط

(المسئلة السابعة)

ثلاث فرق من الفعلة اذا اشتغلت معا فى شغلة معينة اتمتها فى ظرف ١٥ ساعة واما اذا اشتغلت كل واحدة منها على حدتها فان الاولى تستغرق اربعة اخماس الزمن الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة المذكورة وان الثانية تستغرق قدرما تستغرقه الفرقة الثالثة من

الزمن

الزمن ناقصا ١٥ ساعة فكم يكون مقدار الزمن الذى تستغرقه كل فرقة من هذه الفرق الثلاثة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للزمن الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة المذكورة فيكون $\frac{\text{٤س}}{\text{٥}}$ هو الزمن الذى تستغرقه الفرقة الاولى ويكون $\text{س} + \text{١٥}$ هو الزمن الذى تستغرقه الفرقة الثالثة واذا قدرنا ايضا مقدار الشغل بالعدد ١ يكون $\frac{\text{١}}{\frac{\text{٤س}}{\text{٥}}}$ هو مقدار شغل الفرقة الاولى فى ساعة واحدة و $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ مقدار شغل الفرقة الثانية فى ساعة واحدة و $\frac{\text{١}}{\text{س}+\text{١٥}}$ مقدار شغل الفرقة الثالثة فى ساعة واحدة فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{\text{١٥}}{\text{س}} + \frac{\text{١٥}}{\frac{\text{٤س}}{\text{٥}}} + \frac{\text{١٥}}{\text{س}+\text{١٥}} = \text{١}$$ اى

$$\frac{\text{٧٥}}{\text{٤س}} + \frac{\text{١٥}}{\text{س}} + \frac{\text{١٥}}{\text{س}+\text{١٥}} = \text{١}$$ وبحذف المقامات يحدث

$$\text{٧٥ س}^{\text{٢}} + \text{١١٢٥ س} + \text{٦٠ س}^{\text{٢}} + \text{٩٠٠ س} + \text{٦٠ س}^{\text{٢}} = \text{٤ س}^{\text{٣}} + \text{٦٠ س}^{\text{٢}}$$

وبقسمة جميع الحدود على س وتحويل الحدود المتشابهة الى طرف واحد واختصارها وتغيير العلامات يحدث

$$\text{٤ س}^{\text{٢}} - \text{١٣٥ س} = \text{٢٠٢٥}$$ ومنها

$$\text{س} = \frac{\text{١٣٥}}{\text{٨}} \pm \frac{\text{٢٢٥}}{\text{٨}}$$

فحينئذ يكون مقدارا المجهول

$$\text{س}' = \text{٤٥} \ , \ \text{س}'' = -\text{١١}\tfrac{\text{١}}{\text{٤}}$$

ومقدار $\text{س}' = \text{٤٥}$ هو عدد الساعات التى تستغرقها الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة المعينة فبناء على ذلك يكون ٣٦ عدد الساعات التى تستغرقها الفرقة الاولى لاتمام ماذكر ويكون ٦٠ عدد الساعات التى تستغرقها الفرقة الثالثة

واما مقدار س = − ١١ ¼ فغير موافق لمنطوق المسئلة فلا يكون حلا لها وانما هو محقق للمعادلة فقط

(مسالتان يحلان بواسطة التناسب العددى)

(المسئلة الاولى)

من المقرر فى علم الطبيعة ان المسافات التى يقطعها الجسم الساقط المجرد عن العوائق فى ظرف اربع ثوان تكون متناسبة عددية فاذا فرض ان قلة استغرقت ٤ ثوان مدة سقوطها فقطعت ٤،٩٠٤ م فى الثانية الاولى و ١٤،٧١٣ م فى الثانية الثانية و ٢٤،٥٢٢ م فى الثانية الثالثة فما مقدار المسافة التى قطعتها القلة المذكورة فى الثانية الرابعة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للمسافة التى قطعتها القلة فى الثانية الرابعة فتحدث هذه المتناسبة

٤،٩٠٤ . ١٤،٧١٣ : ٢٤،٥٢٢ . س ومنها يستخرج

س = ١٤،٧١٣ + ٢٤،٥٢٢ − ٤،٩٠٤ = ٣٩،٢٣٥ − ٤،٩٠٤

او س = ٣٤،٣٣١ م

فيكون مقدار س = ٣٤،٣٣١ م هو المسافة المطلوبة وبناء على ذلك تكون القلة قد قطعت ٧٨،٤٧٠ م فى مدة الاربع ثوانى

(المسئلة الثانية)

قطر قلة عيارها ٢٤ رطلا محصور بين ١٤٩،١٧ مليمترا و ١٤٧،٤٧ مليمترا فما يكون القطر المتوسط لهذه القلة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للقطر المطلوب فتحدث هذه المتناسبة

١٤٩،١٧ . س : س . ١٤٧،٤٧ ومنها يحدث

٢ س = ٢٩٦،٦٤ اى س = ١٤٨،٣٢ مليمترا

وهو مقدار القطر المتوسط المطلوب

(مسائل تحل بواسطة التناسب الهندسي)

(المسئلة الاولى)

ماهية جيش يحتوى على ١٢٥٠٠ عسكرى بلغت ٢٥٠٢٥٠ غرشا فما مقدار ماهية جيش يحتوى على ١٨٧٥٠ عسكريا بفرض ان ماهية كل نفر من انفار الجيشين واحدة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لماهية الجيش الثانى فتكون ماهية النفر الواحد منه $\frac{س}{١٨٧٥٠}$ وحيث كانت ماهية النفر الواحد من الجيش الاول مبينة بالكسر $\frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠}$ حدثت هذه المتساوية

$\frac{س}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠}$ ومن ذلك تحدث هذه المتناسبة

$$١٢٥٠٠ : ٢٥٠٢٥٠ :: ١٨٧٥٠ : س$$

ومنها يستخرج $س = \frac{١٨٧٥٠ \times ٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠}$ اى

س = ٣٧٥٣٧٥ غرشا وهو ماهية الجيش الثانى وكان يمكن استخراج مقدار المجهول س من المعادلة

$\frac{س}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠}$ بدون مدخلية للتناسب فى ذلك

(المسئلة الثانية)

جيش محاصر عنده من المؤنة ما يكفيه ٣٠ يوما بناء على ان للنفر الواحد من الجيش المذكور فى اليوم الواحد ٣٧٥ درهما فما يكون المقدار اللازم اعطاؤه للنفر الواحد من الجيش بحيث تكفيه هذه المؤنة ٣٦ يوما

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لمقدار الدراهم اللازم اعطاؤها للنفر الواحد فى اليوم الواحد وبالحرف ن لعدد التعيينات اللازم صرفها فى كل يوم للجيش فيكون ٣٧٥ ن هو المقدار المنصرف فى كل يوم من المؤنة فى المدة الاولى وبناء على ذلك يكون مقدار المؤنة جميعها

٣٧٥ × ن × ٣٠ وكذا يكون ن س درهما مقدار المنصرف فى كل يوم من المؤنة فى المدة الثانية ويكون بناء على ذلك ن س × ٣٦ مقدار المؤنة جميعها وحينئذ تحدث هذه المتساوية

٣٧٥ × ن × ٣٠ = ن × س × ٣٦ اى

٣٧٥ × ٣٠ = س × ٣٦

ومنها تنتج هذه المتناسبة

٣٦ : ٣٠ :: ٣٧٥ : س ومنها يستخرج

س = (٣٧٥ × ٣٠) / ٣٦ = ٣١٢٫٥ درهما وهو ما يلزم اعطاؤه للنفر الواحد من المؤنة فى المدة الثانية

وكان يمكن استخراج مقدار المجهول س من اول الامر من المعادلة

٣٦ س = ٣٠ × ٣٧٥ بدون مدخلية للتناسب فى ذلك

(المسئلة الثالثة)

اذا كان المطلوب قسمة عدد الى ثلاثة اجزاء متناسبة لثلاثة اعداد معلومة يقال اذا رمز بالحروف س و ص و ع للاجزاء الثلاثة المطلوبة وبالحروف م و ن و ل للاعداد الثلاثة المعلومة وبالحرف ح للعدد المعلوم الذى يراد تقسيمه يحدث بين س و ص هذا الارتباط ص/س = ن/م وبين س و ع هذا الارتباط ع/س = ل/م فمن الارتباط الاول يستخرج ص = ن س/م ومن الارتباط الثانى يستخرج ع = ل س/م وحيث ان س + ص + ع = ح يكون

س + ن س/م + ل س/م = ح اى

س (م + ن + ل)/م = ح ومنه يستخرج

س = ح م/(م + ن + ل) وبناء على ذلك يكون

ص = ح ن/(م + ن + ل) و

ع = ح ل/(م + ن + ل) وهى مقادير الاجزاء المطلوبة

وقد يحدث من هذه المعادلات الثلاث متناسبات هى

م + ن + ل : ح :: م : س و

م + ن + ل : ح :: ن : ص و

م + ن + ل : ح :: ل : ع

فيشاهد منها أن نسبة مجموع الثلاثة اعداد المتناسبة المعلومة الى العدد الذى يراد تقسيمه كنسبة احد الاعداد المعلومة الى الجزء المطابق له الذى يراد استخراجه

ويشاهد من ذلك جميعه انه يلزم كثير من المتناسبات وبناء عليه كثير من الضرب والقسمة بقدر ما يوجد من الاجزاء المتناسبة التى يراد استخراجها لكن اذا فرض ان $\frac{ح}{م+ن+ل}$ = ك امكن الاستغناء عن الاطالة المذكورة لانه بالفرض المذكور يكون

س = م ك و ص = ن ك و ع = ل ك اعنى انه بضرب خارج قسمة ح على م + ن + ل فى العدد الاول يتكون الجزء الاول الذى يراد استخراجه وبضربه فى العدد الثانى يتكون الجزء الثانى وبضربه فى العدد الثالث يتكون الجزء الثالث وقس على ذلك ولنمثل لذلك بمثالين فنقول

(المثال الاول)

المطلوب قسمة مبلغ ٢٣٧٤٠٠,٥ من الغروش على عشرة بلوكات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار البلوكات بفرض ان عدد انفار البلك الاول ١٠٠ والثانى ٩٦ والثالث ١٠٤ والرابع ١٠٢ والخامس ٩٥ والسادس ٩٢ والسابع ٩٠ والثامن ٨٨ والتاسع ٨٤ والعاشر ٨٠ فلحل ذلك يقال من حيث ان عدد انفار البلوكات جميعها يعادل ٩٣١ يكون ك = $\frac{٢٣٧٤٠٠٥٠}{٩٣١}$ = ٢٥,٥٠ غرشا وبمقتضى ماذكر فى المسألة المتقدمة يقال اذا ضرب العدد ٢٥,٥٠ غرشا المساوى ك فى عدد انفار كل فرقة بالتوالى نتج ما يخص كل بلوك من الغروش فحينئذ يخص البلوك الاول ٢٥٥٠ غرشا والثانى

٢٤٤٨ والثالث ٢٦٥٢ والرابع ٢٦٠١ والخامس ٢٤٢٢،٥٠ والسادس ٢٣٤٦ والسابع ٢٢٩٥ والثامن ٢٢٤٤ والتاسع ٢١٤٣ والعاشر ٢٠٤٠ غرشا

ويمكن اجتناب كثرة الضرب واختصار الحسابات بكيفية ان يقال من حيث ان خارج قسمة ٢٣٧٤٠،٥ غرشا على العدد ٩٣١ الذى هو مجموع عدد انفار البلوكات يعين ما يخص النفر الواحد يكون بناء على ذلك جدول هكذا

نفر	غرش
١	٢٥،٥٠
٢	٥١،٠٠
٣	٧٦،٥٠
٤	١٠٢،٠٠
٥	١٢٧،٥٠
٦	١٥٣،٠٠
٧	١٧٨،٥٠
٨	٢٠٤،٠٠
٩	٢٢٩،٥٠

فلم يبق شئ غير اجراء عملية الجمع فقط هكذا

البلوك الاول: عدد الانفار	البلوك الاول: ما يخص البلوك من الغروش	البلوك الثانى: عدد الانفار	البلوك الثانى: ما يخص الانفار المذكوره من الغروش
١٠٠	٢٥٥٠	٩٠	٢٢٩٥
		٠٦	٠١٥٣
		٩٦	٢٤٤٨

وبيان

وبيان ذلك ان يقال حيث ان عدد انفار البلوك الاول يبلغ ١٠٠ نفر فلتحصيل مايخصه من الغروش يؤخذ مايقابل العدد ١ من الجدول وتقدم الشرطة جهة اليمين خانتين فيتحصل مايخصه وهو ٢٥٥٠ غرشا وكذلك لتحصيل مايخص البلوك الثانى يحلل العدد ٩٦ الذى هو عدد انفاره الى ٩٠ + ٦ فاما التحصيل مايخص ٩٠ اى ٩ عشرات فيؤخذ من الجدول مايقابل العدد ٩ وتقدم الشرطة فيه جهة اليمين خانة واحدة فيكون مايخص العدد ٩٠ نفرا هو ٢٢٩٥ واما التحصيل مايخص العدد ٦ فيؤخذ من الجدول المبلغ ١٥٣ غرشا المقابل للعدد ٦ فيكون ٢٤٤٨ مايخص ٩٦ نفرا

وعلى مثل ذلك يكون العمل فى الثمانية بلوكات الاخر

(المثال الثانى)

المطلوب تقسيم ٤٣٢٥٤٤ مترا مكعبا يراد حفرها لعمل خندق على ٨ الايات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار الالايات بفرض انه يوجد فى الالاى الاول ١٨٥٠ نفرا وفى الثانى ٢٠٠٣ وفى الثالث ١٠٢٧ وفى الرابع ١٥٠٠ وفى الخامس ١٧١٤ وفى السادس ٩٨٠ وفى السابع ١٩٢٥ وفى الثامن ٢٥١٨

فلحل ذلك يقال حيث ان مجموع انفار الالايات جميعها يعادل ١٣٥١٧ نفرا يكون ك = $\frac{٤٣٢٥٤٤}{١٣٥١٧}$ = ٣٢ مترا مكعبا وهو مايخص النفر الواحد وبناء على ذلك يركب هذا الجدول

نفر	يخصه	مترا مكعبا
١		٣٢
٢		٦٤
٣		٩٦
٤		١٢٨
٥		١٦٠
٦		١٩٢
٧		٢٢٤
٨		٢٥٦
٩		٢٨٨

ومنه يستنتج كما فى المثال المتقدم ما يخص كل الاى

وهاك الجدول الذى يعين به ما يخص كل الاى

نمرة الالاى	عدد الانفار	ما يخص كل الاى من الامتار المكعبة
١	١٨٥٠	٥٩٢٠٠
٢	٢٠٠٣	٦٤٠٩٦
٣	١٠٢٧	٣٢٨٦٤
٤	١٥٠٠	٤٨٠٠٠
٥	١٧١٤	٥٤٨٤٨
٦	٠٩٨٠	٣١٣٦٠
٧	١٩٢٥	٦١٦٠٠
٨	٢٥١٨	٨٠٥٧٦

وبمثل ذلك يكون العمل فيما اذا اريد توزيع مبلغ من الغروش على عدة قرى معلومة بحيث تكون اجزاء التوزيع مناسبة لمقادير اطيان هذه القرى المذكورة اوتقسيم مقدار من المكعبات يراد ردمها اوحفرها لانشاء جسر اوترعة على عدة قرى بحيث تكون اجزاء التقسيم مناسبة لمقادير انفار هذه

القرى

القرى وقس على ذلك جميع الامثلة التى تكون من هذا القبيل

(المسئلة الرابعة)

المطلوب تقسيم انعام قدره ٩٥ر٩٠٩٥ غرشا على خادمين بحيث يكون جزأ القسمة مناسبين لماهيتهما ولمدة مكثهما فى الخدمة بفرض أن ماهية الاول فى السنة ٦٠٠٠ غرش ومدة مكثه فى الخدمة ١٥ سنة وأن ماهية الثانى فى السنة ٥٠٠٠ غرش ومدة مكثه فى الخدمة ٢٠ سنة

ولحل ذلك يقال حيث ان جزئى القسمة مناسبان لحاصلى ضرب الماهيتين فى المدتين اعنى مناسبين ٦٠٠٠ × ١٥ اى ٩٠٠٠٠ و ٥٠٠٠ × ٢٠ اى ١٠٠٠٠٠ فيكون مايخص الخادم الاول بمقتضى ماتقدم ٤٥ر٤٥٤٥ غرشا ومايخص الثانى ٥٠ر٥٠٥٠ غرشا

(المسئلة الخامسة)

٣٠٠ عامل مكثوا ٥٠ يوما فى عمل قطعة استحكامات طولها ٢٠٠ متر وعرضها ٦ امتار وعمقها متران ولم يكن شغلهم فى اليوم الواحد الا ٨ ساعات فما يكون مقدار العملة اللازمة لعمل قطعة استحكامات اخرى طولها ١٨٠ ميترا وعرضها ٨ امتار وعمقها ٥ر٢ ميترين فى ظرف ٤٠ يوما بشرط ان لا يشتغلوا فى اليوم الواحد الا ١٠ ساعات

فالجواب عن ذلك ان يقال حيث ان هذه المسئلة مركبة يجب بسطها ونظمها فى سلك القاعدة الثلاثية البسيطة بتحويل الاثنى عشر عددا المحتوى عليها منطوق المسئلة الى اربعة اعداد فقط وذلك ان يرمز بالحرف س للعدد المطلوب من العملة ثم يقال حيث أن ٣٠٠ عامل اشتغلت ٥٠ يوما فى كل يوم ٨ ساعات يكون ٣٠٠ × ٨ × ٥٠ أى ١٢٠٠٠٠

هو عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاولى فى ظرف ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان س عبارة عن عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاخرى فى ظرف ٤٠ يوما فى كل يوم ١٠ ساعات يكون س × ٤٠ × ١٠ اى ٤٠٠ س هو عدد العملة اللازمة لعمل الاستحكامات الاخرى فى ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان مكعب القطعة الاستحكامات الاولى يعادل ٢٠٠ × ٦ × ٢ اى ٢٤٠٠ متر مكعب وان مكعب القطعة الثانيه يعادل ١٨٠ × ٨ × ٢,٥ اى ٣٦٠٠ متر مكعب تؤل المسئلة الى ابسط منها وهى ان يقال حيث ١٢٠٠٠٠ عامل اشتغلوا ٢٤٠٠ متر مكعب فى ظرف ساعة واحدة وان ٤٠٠ س عامل اشتغلوا ٣٦٠٠ متر مكعب فى ظرف ساعة واحدة تحدث هذه المتناسبة

٢٤٠٠ : ٣٦٠٠ :: ١٢٠٠٠٠ : ٤٠٠ س ومنها

يستخرج ٤٠٠ س = $\frac{١٢٠٠٠٠ × ٣٦٠٠}{٢٤٠٠}$ = ١٨٠٠٠٠،

و س = $\frac{١٨٠٠٠٠}{٤٠٠}$ = ٤٥٠

فحينئذ يلزم ٤٥٠ فاعلا لعمل قطعة الاستحكامات الاخرى فى المدة المعينة فى رأس السؤال

(مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية)

بملاحظة ما هو مقرر فى علم الميكانيكا فى قواعد تحرك سقوط الاجسام من ان المسافة التى يقطعها جسم ساقط فى زمن قدره ز تعادل $\frac{١}{٢}$ ح ز^{٢} بفرض ان ح مقدار جذب الارض للاجسام وهو بمقتضى ما دلت عليه التجاريب يساوى ٩,٨٠٨ امتار فى الثانية الواحدة فى باريس و ٩,٧٨٠ امتار تقريبا فى مصر تحل مسألتان الاولى والثانية من المسائل الآتية

(المسئلة الاولى)

ما الارتفاع الذى تصل اليه بنبة تستغرق فى صعودها زمنا كالزمن الذى

تستغرقه

تستغرقه فى الهبوط بفرض انها تستغرق فى الصعود والهبوط زمنا قدره عشر ثوان

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س للارتفاع المطلوب فيكون

$\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ن}^2 = ٤٫٩٠٤ \times \text{ن}^2$ وحيث كان $\text{ن} = ٥$ يكون

$\text{س} = ٤٫٩٠٤ \times ٥^2 = ٤٫٩٠٤ \times ٢٥ = ١٢٢٫٦٠٠$ مترا وهو الارتفاع المطلوب

(المسئلة الثانية)

جسم سقط من اعلى منارة ارتفاعها ٧٨٫٤٦٤ مترا فما يكون مقدار الزمن الذى استغرقه الجسم المذكور فى سقوطه

فالجواب عن ذلك ان يقال من المعادلة $\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ن}^2$ اى $٧٨٫٤٦٤^{\text{م}} = ٤٫٩٠٤ \times \text{ن}^2$ يستنتج $\text{ن}^2 = \frac{٧٨٫٤٦٤}{٤٫٩٠٤} = ١٦$ اى $\text{ن} = ٤$

اعنى ان الجسم المذكور يستغرق فى سقوطه مقدارا من الزمن قدره ٤ ثوان

(المسئلة الثالثة)

غيطانى كان يسقى مائة شجرة موضوعة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن مجاورتها ٥ امتار بشرط ان البئر الذى يؤخذ منه الماء على امتداد خط الشجر بعيدا عن الشجرة الاولى بمقدار عشرة امتار فما تكون المسافة التى يقطعها الغيطانى المذكور فى الذهاب والاياب لسقى المائة شجرة المذكورة

فالجواب عن ذلك انه اذا تؤمل فى منطوق المسئلة يشاهد ان الغيطانى المذكور يقطع ٢٠ مترا فى سقى الشجرة الاولى و ٣٠ مترا فى سقى الثانية و ٤٠ مترا فى سقى الثالثة و ٥٠ مترا فى سقى الرابعة وهلم جرا فبناء عليه تكون المسافة التى يقطعها الغيطانى المذكور لسقى الشجر جميعه حاصل جمع حدود

متوالية عددية حدها الاول ح = ٢٠ واساسها س = ٢٠،
وعدد حدودها ن = ١٠٠ ويستنتج هذا الحاصل من القانون

ع = (٢ح ن + س ن (ن − ١)) / ٢ بوضع مقادير ح و ن و س بدلها
فاذن يحدث

ع = (٢×٢٠×١٠٠ + ١٠٠٠×٩٩) / ٢ = (٤٠٠٠ + ٩٩٠٠٠) / ٢ اى
ع = ٥١٥٠٠ متر اى ٥١٫٥ ميريامترات اى ١٢ فرسخا
تقريبا

(المسئلة الرابعة)

غيطانى قطع مسافة قدرها ١٣٧٥٠ مترا فى ذهابه وايابه لسقى مقدار من الاشجار شجرة شجرة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن مجاورتها ٥ امتار ولما وصل الى الشجرة الاخيرة لسقيها كان قد قطع مسافة قدرها ٥٢٠ مترا مبدءها البئر الذى كان يغترف منه الموضوع على استقامة الاشجار والمطلوب معرفة عدد الاشجار والبعد الذى بين البئر والشجرة الاولى

فالجواب ان يقال حيث أن المسافة التى قطعها الغيطانى لسقى الشجر جميعه فى الذهاب هى عين المسافة التى قطعها فى الاياب تكون المسافة التى قطعها فى الذهاب او الاياب مبينة بهذا المقدار ١٣٧٥٠/٢ المساوى ٦٨٧٥، مترا وكذلك تكون المسافة التى قطعها لسقى الشجرة الاخيرة فى الاياب او الذهاب مبينة بهذا المقدار ٥٢٠/٢ المساوى ٢٦٠ وبناء عليه يكون من المسافات المقطوعة بالتوالى لسقى الشجر جميعه متوالية عددية اساسها س = ٥ وحدها الاخير ل = ٢٦٠ ومجموع حدودها ع = ٦٨٧٥ ويستخرج عدد حدودها ن من هذا القانون

ن = (٢ل + س ± √((٢ل + س)² − ٨ س ع)) / ٢س بوضع مقادير س و ل
وع

وع بدلها فاذا اجريت ذلك تجد $ن = \frac{٥٢٥ \pm ٢٥}{١٠}$ فحينئذ

$نَ = \frac{٥٢٥ - ٢٥}{١٠} = ٥٠$ و $نً = \frac{٥٢٥ + ٢٥}{١٠} = ٥٥$ فاما

المقدار $نَ = ٥٠$ فهو حل للمساله (لانه باعتبار ذلك يكون ح المساوى

ل ـ س (ن ـ ١) اى ٢٦٠ ـ ٥ × ٤٩ اى ٢٦٠

ـ ٢٤٥ مساويا ١٥ وهو المقدار المحقق للمتوالية) اعنى ان عدد

الشجر يكون ٥٠ شجرة والبعد الكائن ما بين الشجر والبئر الذى يغترف

منه ١٥ مترا

واما المقدار الآخر $نً$ المساوى ٥٥ فليس حلا للمسالة التى نحن

بصددها لانه باعتبار ذلك يحدث ح = ـ ١٠

غير ان مقدارى ن المتقدمين يحلان معا المتوالية العددية التنازلية التى

اكبر حدودها ل = ٢٦٠ واساسها س = ٥ وحاصل جمع

حدودها ع = ٦٨٧٥

(المسئلة الخامسة)

اذا كان المطلوب البحث عن القانون الذى يعين به حاصل جمع مربعات حدود

متوالية عددية يفرض ان ح و ء و هـ و ز و .... و ك و ل

حدود متوالية هندسية تصاعدية و س اساسها و ن عدد حدودها

و $ع_١$ حاصل جمعها و $ع_٢$ حاصل جمع مربعاتها و $ع_٣$ حاصل جمع

مكعباتها فيحدث

ء = ح + س و هـ = ء + س و ... و ل = ك + س.

وبناء عليه يكون

$$\text{د}^{٣} = (\text{ح} + \text{س})^{٣} = \text{ح}^{٣} + ٣\,\text{ح}^{٢}\,\text{س} + ٣\,\text{ح}\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} \quad \text{و}$$

$$\text{هـ}^{٣} = (\text{د} + \text{س})^{٣} = \text{د}^{٣} + ٣\,\text{د}^{٢}\,\text{س} + ٣\,\text{د}\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} \quad \text{و}$$

$$\vdots$$

$$\text{ل}^{٣} = (\text{ك} + \text{س})^{٣} = \text{ك}^{٣} + ٣\,\text{ك}^{٢}\,\text{س} + ٣\,\text{ك}\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣}$$

وبجمع هذه المعادلات على بعضها حدا على حد بالتناظر يحدث

$$\text{ع}_{٣} - \text{ح}^{٣} = \text{ع}_{٣} - \text{ل}^{٣} + ٣\,\text{س}\,(\text{ع}_{٢} - \text{ل}^{٢}) + ٣\,\text{س}^{٢}\,(\text{ع}_{١} - \text{ل}) + \text{س}^{٣}\,(\text{ن} - ١)$$

أو

$$\text{ح}^{٣} = \text{ل}^{٣} - ٣\,\text{س}\,(\text{ع}_{٢} - \text{ل}^{٢}) - ٣\,\text{س}^{٢}\,(\text{ع}_{١} - \text{ل}) - \text{س}^{٣}\,(\text{ن} - ١)$$

ومن هذه المعادلة يحدث

$$\text{ع}_{٢} = \frac{٣\,\text{س}\,\text{ل}^{٢} + \text{ل}^{٣} - \text{ح}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢}\,(\text{ع}_{١} - \text{ل}) - \text{س}^{٣}\,(\text{ن} - ١)}{٣\,\text{س}} \quad \cdots \quad (١)$$

وحيث ان $\text{ل} = \text{ح} + \text{س}\,(\text{ن} - ١)$ و $\text{ع}_{١} = (٢\,\text{ح} + \text{ن}\,\text{س} - \text{س})\,\frac{\text{ن}}{٢}$

يسهل معرفة $\text{ع}_{٢}$ اى حاصل جمع مربعات حدود المتوالية متى علم ح و س و ن

واذا كان المطلوب ايجاد حاصل جمع مربعات حدود متوالية السرد الطبيعى للاعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ... ل يكفى فى قانونى (١) و (٢) فرض ان $\text{ح} = ١$ و $\text{س} = ١$ وكذا $\text{ل} = \text{ن}$ فيحدث

$$\text{ع}_{١} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ١)}{٢}$$

$\text{ع}_{٢}$

$$ع_{٢} = \frac{٢ن^{٣}+٣ن^{٢}+ن}{٦} \quad \text{او}$$

$$ع_{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١\times٢\times٣}$$

فهذا هو القانون المطلوب

فى تطبيق هذا القانون على معرفة عدد القلل الموجودة فى احدى الكومات الثلاث المعتاد تشكيلها فى جبخانات الطوبجية اذ من المعلوم انهم يضعون القلل والقبر والبنب على ثلاث صور متنوعة وهى الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة والكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية والكومة الممتدة المستطيلة القاعدة

(فى حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة)

هذه الكومة تتركب من طبقات مربعة متزايدة التربيع بالابتداء من رأس الشكل الى قاعدته فاذا سلكنا هذا الترتيب يكون فى الطبقة الاولى قلة واحدة وفى الطبقة الثانية اربع قلل وفى الثالثة تسع قلل وفى الرابعة ست عشرة قلة وفى الخامسة خمسة وعشرون وهكذا الى الطبقة التى نعرتها $ن$ فانها تحتوى على $ن^{٢}$ قلة والطبقة الاخيرة يقال لها قاعدة الكومة ومجموع قلل الكومة يكون حينئذ عبارة عن مجموع مربعات الاعداد الطبيعية بالابتداء من مربع العدد ١ الى مربع $ن$ (و $ن$ يدل على عدد القلل التى يحتوى عليها كل ضلع من القاعدة اوكل حرف من احرف الكومة)

فاذا رمز بالحرف $ع_{٢}$ لعدد القلل المحتوية عليها الكومة يكون بمقتضى ماتقدم

$$ع_{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١\times٢\times٣}$$

وهذا جدول لا يمكن الاستغناء به عن القانون اذا كان عدد الطبقات ١٢ فاقل وهو محقق للقانون ايضا

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٤	٥
٣	٩	١٤
٤	١٦	٣٠
٥	٢٥	٥٥
٦	٣٦	٩١
٧	٤٩	١٤٠
٨	٦٤	٢٠٤
٩	٨١	٢٨٥
١٠	١٠٠	٣٨٥
١١	١٢١	٥٠٦
١٢	١٤٤	٦٥٠

فالصف الاول يدل على عدد الطبقات او على عدد القلل الموجود فى كل حرف من الكومة والصف الثانى يدل على عدد القلل الموجودة فى كل طبقة والصف الثالث يدل على عدد القلل الموجودة فى الكومة بتمامها

فاذا كان ن = ١٠ مثلا اعنى انه يوجد عشر طبقات يؤل القانون الى $ع_٣ = \frac{١٠ \times ١١ \times ٢١}{٦} = ٣٨٥$ كما هو مبين بالجدول

(فى حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية)

هذه الكومة تتركب من طبقات مثلثية متزايدة السطح بالابتداء من الرأس الى القاعدة وكل طبقة عبارة عن مثلث متساوى الاضلاع ماعدا الطبقة الاولى فانها لا تحتوى الا على قلة واحدة وضلع الطبقة الثانية يحتوى على قلتين وضلع الثالثة على ثلاث قلل وضلع الرابعة على اربع وهكذا الى الطبقة التى نمرتها ن فان ضلعها يحتوى على ن قلة وعدد القلل التى تحتوى عليها اى

طبقة

طبقة كانت عبارة عن مجموع حدود متوالية عددية حدها الاول ١ واساسها واحد كذلك وعدد حدودها يساوي عدد القلل التي يحتوى عليها كل ضلع من الطبقة المذكورة فحينئذ اذا كان ضلع الطبقة يحتوى على $ن$ قلة فالطبقة تحتوى على $\frac{ن^٢+ن}{٢}$ قلة اى $\frac{١}{٢}(ن^٢+ن)$ فاذا كانت $ن$ تساوى على التعاقب ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ فالطبقات تحتوى على $\frac{١}{٢}(١^٢+١)$ و $\frac{١}{٢}(٢^٢+٢)$ و $\frac{١}{٢}(٣^٢+٣)$ و $\frac{١}{٢}(٤^٢+٤)$ و.... $\frac{١}{٢}(ن^٢+ن)$ قلة فاذا كان $ع$ رمزا لعدد القلل الموجودة فى الكومة كما تقدم يتحصل

$$ع = \frac{١}{٢}(١^٢+١)+\frac{١}{٢}(٢^٢+٢)+\frac{١}{٢}(٣^٢+٣)+....+\frac{١}{٢}(ن^٢+ن)$$

$$= \frac{١}{٢}(١^٢+٢^٢+٣^٢+٤^٢+....+ن^٢)+\frac{١}{٢}(١+٢+٣+....+ن)$$

$$= \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١٢}+\frac{ن^٢+ن}{٤}=\frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{١\times٢\times٣}$$

ولتكوين جدول لهذه الكومة كما فعل ذلك بالكومة المتقدمة يقال حيث كانت الطبقة التى ضلعها يحتوى على $ن$ قلة تتركب من صفوف مكونة متوالية عددية كالمتوالية المتكونة من اعداد السرد الطبيعى ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و .... و $ن$ يكون عدد القلل الموجود فى هذه الطبقة مساويا ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + $ن$ وبناء على ذلك يتركب هذا الجدول

عدد قلل الطبقات

فى الطبقة الاولى	١ = ١
فى الثانية	١ + ٢ = ٣
فى الثالثة	١ + ٢ + ٣ = ٦
فى الرابعة	١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠
فى النونية	١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + $ن$

وبالتأمل فى هذا الجدول يشاهد ان كل طبقة من طبقات هذه الكومة مكونة من اضافة الاعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب الى العدد الدال على نمرة الطبقة وبمقتضى ذلك يحدث هذا الجدول

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٣	٤
٣	٦	١٠
٤	١٠	٢٠
٥	١٥	٣٥
٦	٢١	٥٦
٧	٢٨	٨٤
٨	٣٦	١٢٠
٩	٤٥	١٦٥
١٠	٥٥	٢٢٠
.	.	.
.	.	.
.	.	.
لخ	لخ	لخ

فالصف الاول يدل على عدد القلل التى يحتوى عليها كل حرف من احرف الكومة او على عدد طبقات الكومة والثانى يدل على عدد القلل الموجودة فى كل طبقة واعداد هذا الصف متكونة من اضافة الاعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب من ١ الى العدد الدال على نمرة الطبقة والصف الثالث يدل على عدد القلل الموجود فى الكومة بتمامها واعداد هذا الصف متكونة من اضافة جميع اعداد الصف الثانى لبعضها على التعاقب الى العدد

الذى

الذى نرمز له بحرف ن عدد طبقات الكومة وحينئذ فكل من هذه الحواصل يبين بالضرورة مجموع قلل الكومة بتمامها لانه عبارة عن مجموع طبقات هذه الكومة فاذن يوجد ٢٢٠ قلة فى الكومة التى عدد طبقاتها ١٠ وتحقيق ذلك انه اذا وضع ١٠ بدل ن فى القانون

$$ع_٣ = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٦} \text{ آل الى}$$

$$ع_٣ = \frac{١٠ \times ١١ \times ١٢}{٦} = ٢٢٠$$

وهذا ناتج عين الناتج المبين بالجدول

(فى حساب الكومة الممتدة المستطيلة القاعدة)

هذه الكومة تتركب من طبقات مستطيلية متزايدة السعة بالابتداء من القمة الى القاعدة وان الطبقة الاولى منها تحتوى على صف واحد من القلل فقط فاذا رمز بالحرف م لعدد القلل الكائنة فيه يكون فى الطبقة الثانية صفان من القلل فى كل صف منهما م + ١ قلة وفى الطبقة الثالثة ٣ صفوف فى كل صف م + ٢ قلة وفى الطبقة الرابعة ٤ صفوف فى كل صف منها م + ٣ قلة وفى الطبقة النونية ن صفا فى كل صف منها م + ن − ١ قلة وبالبناء على ذلك فعدد القلل التى فى الطبقة النونية يكون ن (م + ن − ١) = ن م + $ن^٢$ − ن فاذا وضع بدل ن اعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و .... و ن بالتوالى فى هذا القانون يحدث

فى الطبقة الاولى	م + $١^٢$ − ١
وفى الثانية	٢ م + $٢^٢$ − ٢
وفى الثالثة	٣ م + $٣^٢$ − ٣
وفى الرابعة	٤ م + $٤^٢$ − ٤
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮
وفى الطبقة النونية	ن م + $ن^٢$ − ن

واذا رمزنا بالحرف ع لحاصل جمع الطبقات يكون

ع = م (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ···· + ن) + (١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ··· + ن^٢)

− (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ···· + ن) او

ع = م × ن(ن+١)/٢ + ن(ن+١)(٢ن+١)/٦ − ن(ن+١)/٢

= ن(ن+١)/٢ × (م + (٢ن+١)/٣ − ١)

= ن(ن+١)(٣م+٢ن−٢)/٦

ولا يمكن وضع جدول لهذه الكومة الا باعطاء م مقدارا اختياريا فاذا فرض ان م = ١٠ مثلا تحصل هذا الجدول

عدد الطبقات	مقدار الطبقات	الكومة
١	١٠	١٠
٢	٢٢	٣٢
٣	٢٦	٦٨
٤	٥٢	١٢٠
٥	٧٠	١٩٠
٦	٩٠	٢٨٠
٧	١١٢	٣٩٢
٨	١٣٦	٥٢٨
٩	١٦٢	٦٩٠
١٠	١٩٠	٨٨٠
..	...	...
خ	خ	خ

فالصف الاول يدل على عدد طبقات الكومة وعلى عدد كل ضلع جانبي وهذا الصف ايضا يدل على رتب الطبقات في الكومة المعلومة والصف الثاني يدل على عدد القلل التي توجد في الطبقات المختلفة المكونة للكومة والصف المذكور

يتكون

يتكون من القانون ن(م + ن − ١) المتقدم بفرض م = ١٠ واعطاء ن جميع الاعداد الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و .... ن بالتوالى والصف الثالث اى عدد منه يحسب باضافة اعداد الصف الثانى من ابتداء العدد الاول للصف المذكور الى العدد المحاذى له فى الوضع وهو مركب ايضا من حاصل جمع الطبقات وهو يحتوى على عدد قلل الكوم المتناظرة وحينئذ فالحد العاشر ٨٨٠ يدل على انه يوجد ٨٨٠ قلة فى الكومة المستطيلة المركبة من ١٠ طبقات والقانون ع = $\frac{ن(ن+١)(٣م+٢ن-٢)}{٦}$

اذا وضع فيه ١٠ بدل م و ١٠ بدل ن ال الى

ع = $\frac{١٠ \times ١١ \times ٤٨}{٦}$ = ٨٨٠ وهو ناتج موافق للناتج الموجود بالجدول هذا كله اذا كانت الكومة تامة فاذا لم تكن الكومة تامة اعتبر تمامها ثم تحسب الكومة التامة والكومة التى لزم اضافتها لتتميم الكومة الناقصة والفرق بين هاتين الكومتين يعين الكومة الناقصة ولنمثل لذلك فنقول

اذا فرض ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المربعة مركبة من ٤ طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكاملة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{٨ \times ٩ \times ١٧}{٦}$ = ٢٠٤ قلة فاذا حذف منها $\frac{٤ \times ٥ \times ٩}{٦}$ = ٣٠ قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتممة فالباقى الذى هو ١٧٤ يدل على عدد القلل الكائن فى الكومة الناقصة

واذا فرض ايضا ان الكومة الهرميسة الناقصة ذات القاعدة المثلثية مركبة من خمس طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكومة التامة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{٦}$ = ١٢٠ قلة فاذا حذف منها $\frac{٣ \times ٤ \times ٥}{٦}$ = ١٠ قلات وهو المقدار الذى يوجد فى الثلاث طبقات المتممة فالباقى ١١٠ قلة يكون عدد القلل الموجود فى الكومة الناقصة

واذا فرض ان الكومة المستطيلة الناقصة مركبة من ٦ طبقات وكل ضلع من اضلاع قاعدتها يحتوى على ١٥ قلة وان صف القاعدة

المحتوية على ١٠ قلات كانت الكومة التامة مركبة من ١٠
طبقات ومحتوية على $\frac{١٠ \times ١١ \times ٣٦}{٦}$ = ٦٦٠ قلة فاذا حذف منها
$\frac{٤ \times ٥ \times ٢٤}{٦}$ = ٨٠ قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتممة
يكون الباقى ٥٨٠ هو الكومة الناقصة

ويتعين المضروب ٣٦ فى هذا المثال بواسطة المضروب ٣ م + ٢ ه − ٢
الداخل فى القانون المتقدم وحيث كان ١٥ = م + ه − ١
يكون م = ١٥ − ١٠ + ١ = ٦ وكذلك يكون المضروب
٢٤ فى الكومة المتممة = ٣ × ٦ + ٢ × ٤ − ٢

واذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات كومة هرمية ذات قاعدة مربعة بعد
معرفة عدد القلل المحتوية عليه الكومة امكن بواسطة الجدول الممتد امتدادا
كافيا لهذا الغرض الاستغناء عن اجراء عملية الحساب بان يبحث فى الخط
الثالث عند عدد قلل الكومة فالعدد الموجود فى الخط الاول المقابل لهذا
العدد يعين مقدار الطبقات الموجودة فى الكومة فعلى ذلك اذا كانت الكومة
تحتوى على ٦٥٠ قلة تكون مركبة من ١٢ طبقة

ويمكن ايضا حل هذه المسألة بواسطة القانون ع = $\frac{ه^{٣} + ٣ه^{٢} + ٢ه}{٦}$
الذى فيه كمية ع معلومة بان يستخرج منه كمية ه لكن حيث ان هذه
المعادلة بدرجة ثالثة فيتعسر حلها بالطرق المعتادة يكتفى بالبحث عن الجذر
التكعيبى لاعظم مكعب يوجد فى ٣ ع وهذا الجذر التكعيبى يكون
مقدارا للكمية ه ان وافق مقدار ع كومة كاملة وبرهانه ان يستخرج
من المعادلة المتقدمة هذه المعادلة

$$٣ع = ه^{٣} + \frac{٣ه^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}ه$$

ومنه ينتج $٣ع > ه^{٣}$ و $٣ع < (ه + ١)^{٣}$

او $ه < \sqrt[٣]{٣ع}$ و $ه + ١ > \sqrt[٣]{٣ع}$

فعلى

ثم على ذلك تكون الكمية ن الجزر التكعيبي لاعظم مكعب موجود في كمية

٣ ع فاذا تذكرنا ان $(ن+١)^٣ = ن^٣ + ٣ن^٢ + ٣ن + ١$

يحدث كما فرضنا ٣ع او $ن^٣ + \frac{٣ن^٢}{٢} + \frac{١}{٢}ن < (ن+١)^٣$

فاذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات الكومة ذات القاعدة المثلثية فمن

القانون $ع = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٦} = \frac{ن^٣+٣ن^٢+٢ن}{٦}$ يحدث

$$٦ع = ن^٣ + ٣ن^٢ + ٢ن$$

وينتج من ذلك

$$٦ع > ن^٣ \text{ و } ٦ع < (ن+١)^٣$$

فكمية ن تكون حينئذ الجذر التكعيبي لاعظم مكعب موجود

في مقدار ٦ ع

واما الكومة المستطيلة بحيث كان يدخل في قانونها

$ع = \frac{ن(ن+١)(٣م+٢ن-٢)}{٦}$ ثلاث مجاهيل مختلفة يلزم معرفة

مجهولين من هذه المجاهيل الثلاثة لتعيين الثالث

تم طبع المنحة الزهريه * في الاعمال الجبريه * بمطبعة مدرسة المهندسخانة

الخديويه * الكائنة ببولاق مصر المحميه * ملحوظا بعين عناية

ناظرها من تلافى رتب المجد وتداركه * سعادة على بيك

مبارك * في اواسط شوال المبارك * الذى هو

من شهور سنة ١٢٦٩ هجريه * على

صاحبها افضل الصلاة

وازكى التحيه

تم

